Robótica

Prof. Reinaldo Bianchi
Centro Universitário FEI
2016

5ª Aula

Pós Graduação - IECAT

Objetivos desta aula

- Velocidade e Aceleração de corpo rígido.
- Matrizes de inércia.
- Bibliografia
  - Capítulos 5 do Craig.

Introdução

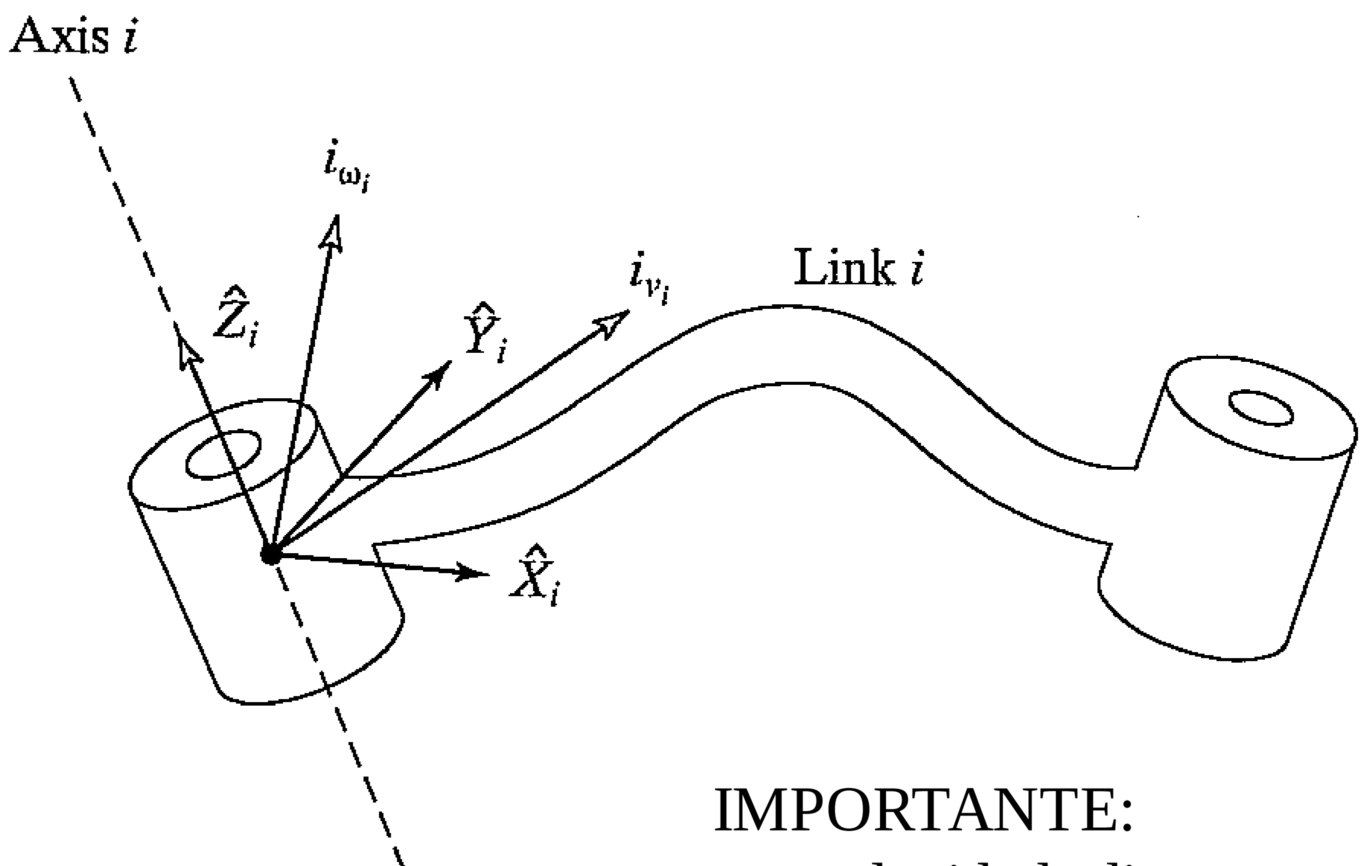
- Mecânica =
  - Estática + Dinâmica + Cinemática.
- A cinemática permite posicionar o manipulador.
- Estática permite calcular as forças e torques em repouso.
- A dinâmica permite gerar as equações de controle do manipulador.

Velocidade e Aceleração

Movimentos de um elo do manipulador

- Em respeito aos movimendos dos elos do manipulador, sempre usaremos o Frame $\{0\}$ como sendo o frame de referência.
- A cada instante, um elo de um robô em movimento possui alguma velocidade linear e angular.
  – Os vetores de velocidade de um elo i são descritos em relacão ao Frame $\{i\}$

Velocidades de um elo



IMPORTANTE:
v = velocidade linear
ω = velocidade angular

Propagação das velocidades

- Como calcular a velocidade em cada elo?
  - Um manipulador é uma cadeia de elos, cada um capaz de se movem em relação aos seus vizinhos.
- Podemos calcular as velocidades:
  - A velocidade do elo $i+1$ será a do elo i mais qualquer componente adicionada pelo elo $i+1$.

Algoritmo para Propagação das velocidades

- Inicie pela base:
  - O elo {0} tem velocidade zero.
- Calcule a velocidade do elo {i+1} em respeito ao frame {i=1}:
  - Velocidade Linear e
  - Velocidade Angular
- Repita até chegar ao último elo.
- Calcule a velocidade em relação ao frame {0}, para saber a velocidade real.

Propagação das velocidades

- A propagação da velocidade linear é dada pelas seguintes equações:
- Caso a junta seja de rotação:

$$ {}^{i}v_{i+1} = {}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}. $$

- No frame {i+1}:

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}). $$

Propagação das velocidades

- A propagação da velocidade linear é dada pelas seguintes equações:
- Caso a junta seja de prismática:

$$^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R(^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

Propagação das velocidades

- A propagação da velocidade angular é:
- Caso a junta seja de rotação:

$$^{i}\omega_{i+1} = {}^{i}\omega_{i} + {}^{i}_{i+1}R\,\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

sendo que $\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = {}^{i+1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix}.$

- No frame {i+1}:

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

Lembrando

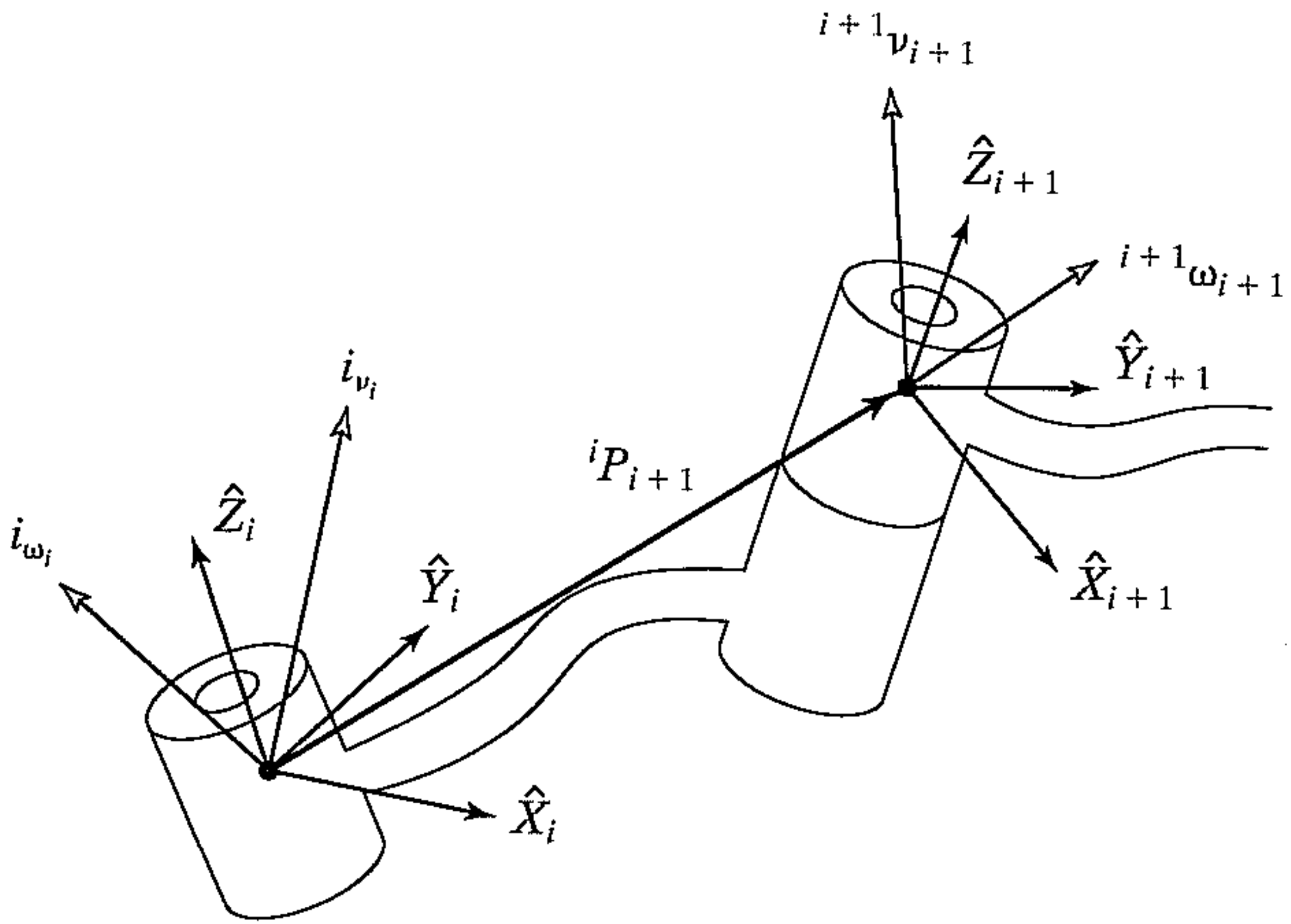
- v_i = velocidade linear do elo i.
- ω_i = velocidade angular do elo i.
- θ_i= velocidade angular do motor da junta i.
- $\dot{d}_i$= velocidade linear do motor prismático do elo i.

Propagação das velocidades

- A propagação da velocidade angular é dada pelas seguintes equações:
- Caso a junta seja prismática:

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R \, {}^{i}\omega_{i},$$

Propagando velocidades



Exemplo 2: 2R (pg 146 do livro)

A two-link manipulator with rotational joints is shown in Fig. 5.8. Calculate the velocity of the tip of the arm as a function of joint rates. Give the answer in two forms—in terms of frame {3} and also in terms of frame {0}.

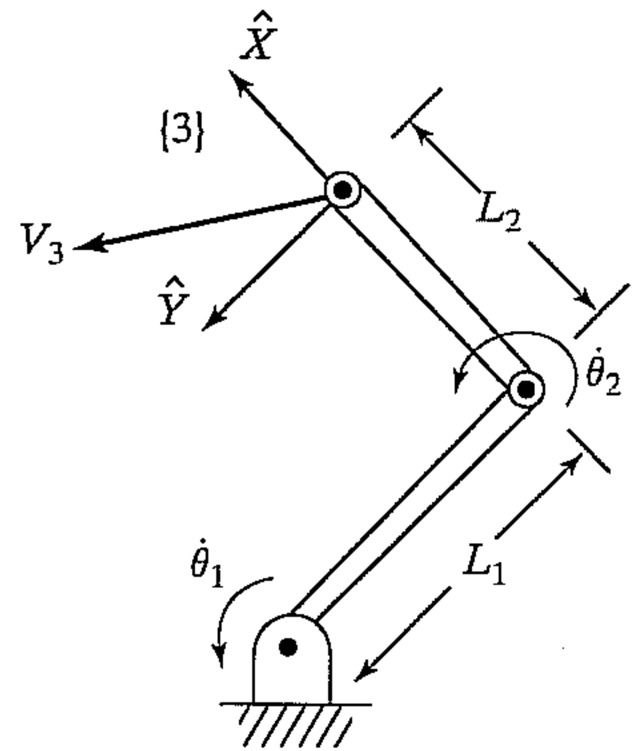


FIGURE 5.8: A two-link manipulator.

Solução: defina os frames

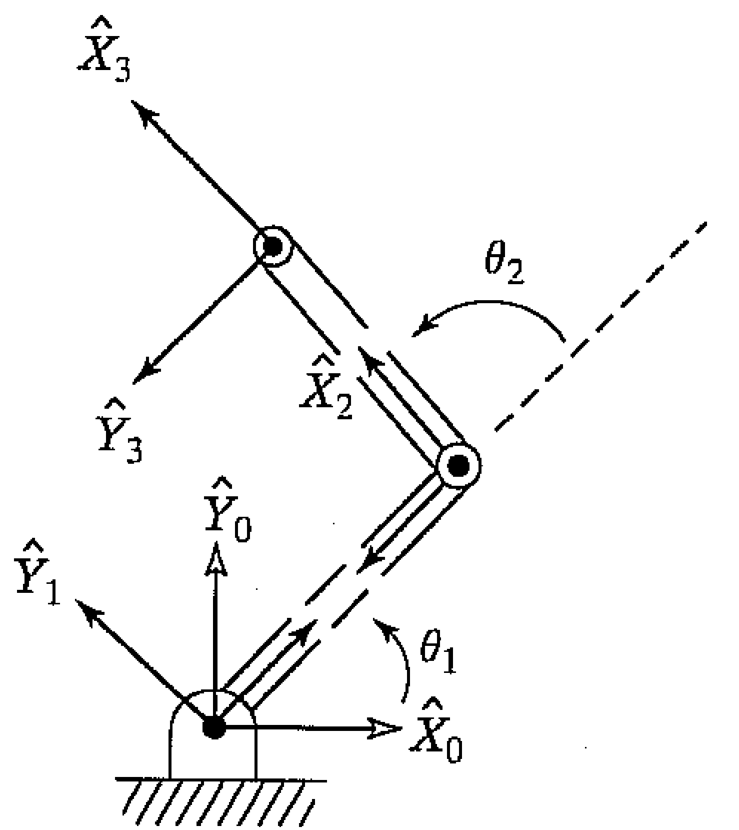


FIGURE 5.9: Frame assignments for the two-link manipulator.

Calcule a transformação entre os frames:

$$
{}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

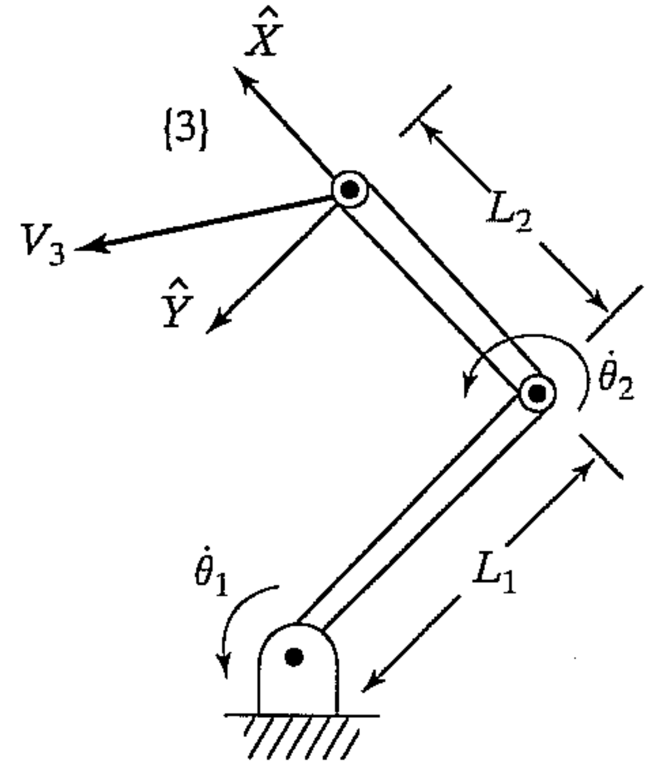
$$
{}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

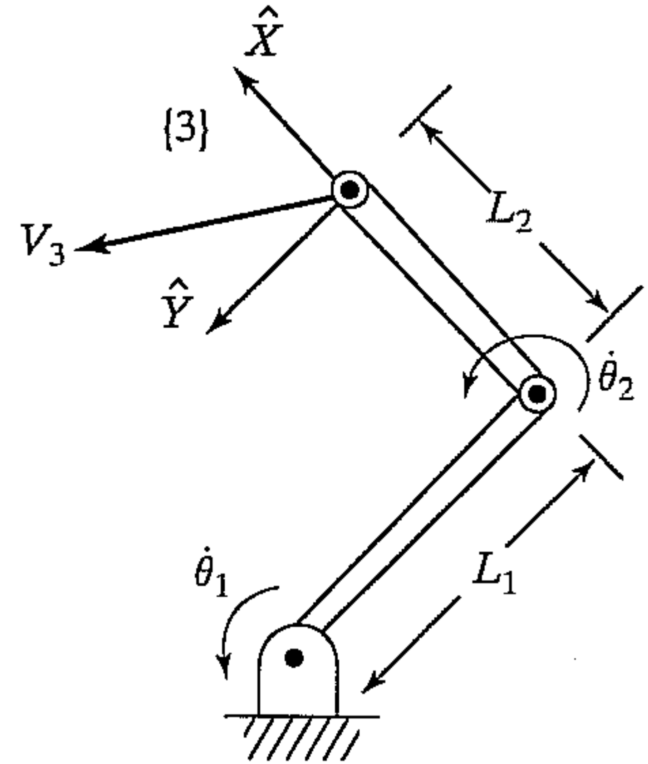
Calcule as velocidades elo a elo:

$$^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix},$$

$$^{1}v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$



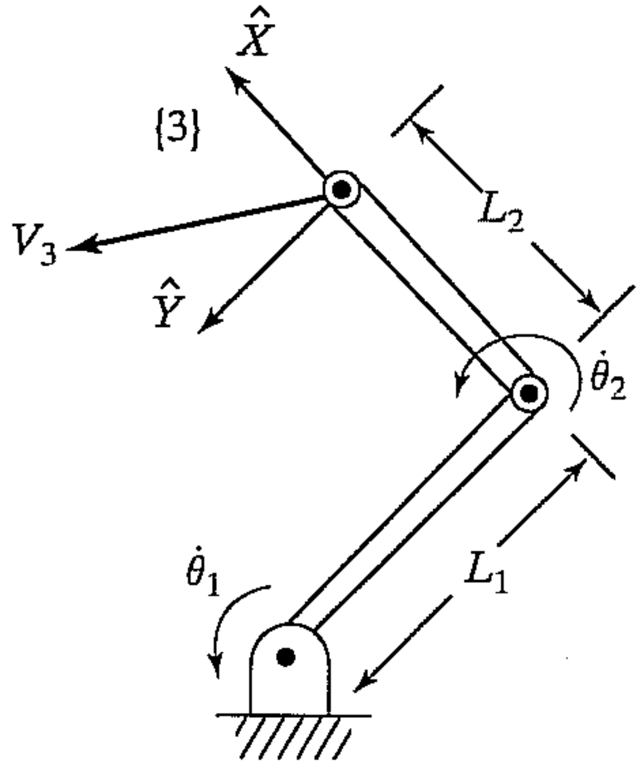
Calcule as velocidades elo a elo:



$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^{2}v_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, $$

Calcule as velocidades elo a elo:



$$^{3}\omega_3 = {}^{2}\omega_2,$$

$$^{3}v_3 = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontre a velocidade em relação ao frame {0}

$$ {}^0_3R = {}^0_1R \quad {}^1_2R \quad {}^2_3R = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. $$

$$ {}^0v_3 = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}. $$

Propagando as acelerações

- É calculado de maneira igual a propagação das velocidades, mas com outras fórmulas.
- É importante para calcular a força aplicada sobre o manipulador.

Propagando aceleração angular

- Para juntas de rotação:

$$ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i} + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}. $$

- Para juntas prismáticas:

$$ {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i}. $$

Propagando aceleração linear

- Para juntas de rotação:

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R[{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i]$$

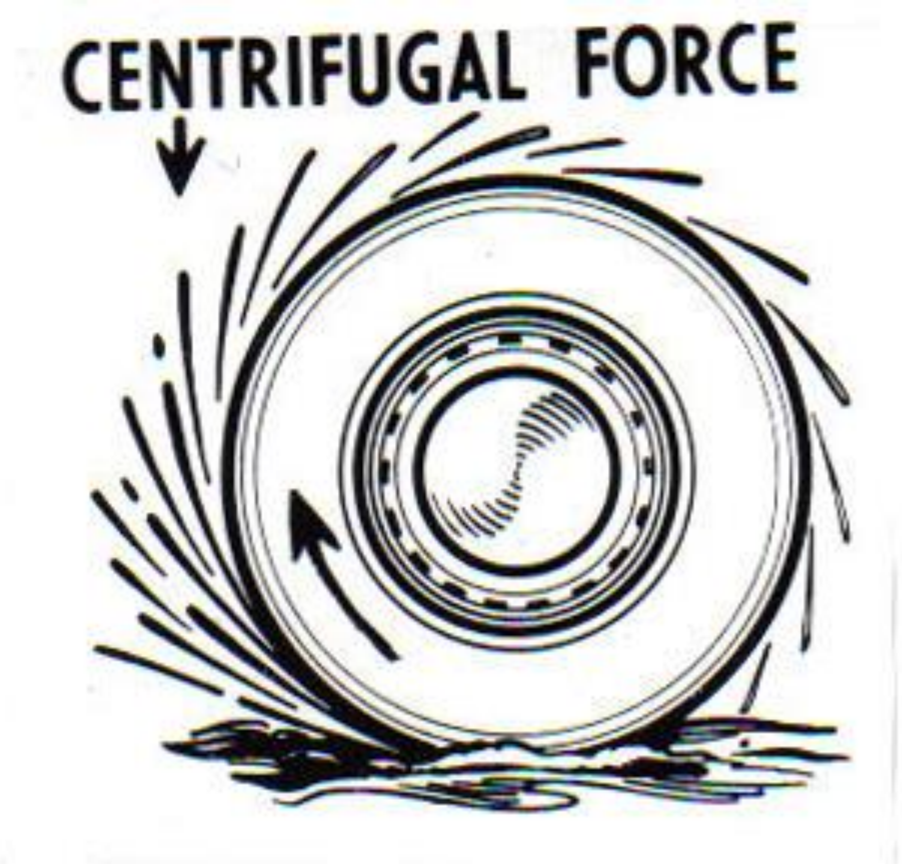
- Para juntas prismáticas:

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i)$$
$$+ 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

Lembrando

- v_i = velocidade linear do elo i.
- ω_i = velocidade angular do elo i.
- θ_i= velocidade angular do motor da junta i.
- $\ddot{\theta}_i$= aceleração angular do motor da junta *i*.
- $\dot{d}_i$= velocidade linear do motor prismático do elo i.
- $\ddot{d}_i$= aceleração linear do motor prismático do elo i.

Forças Centrífugas

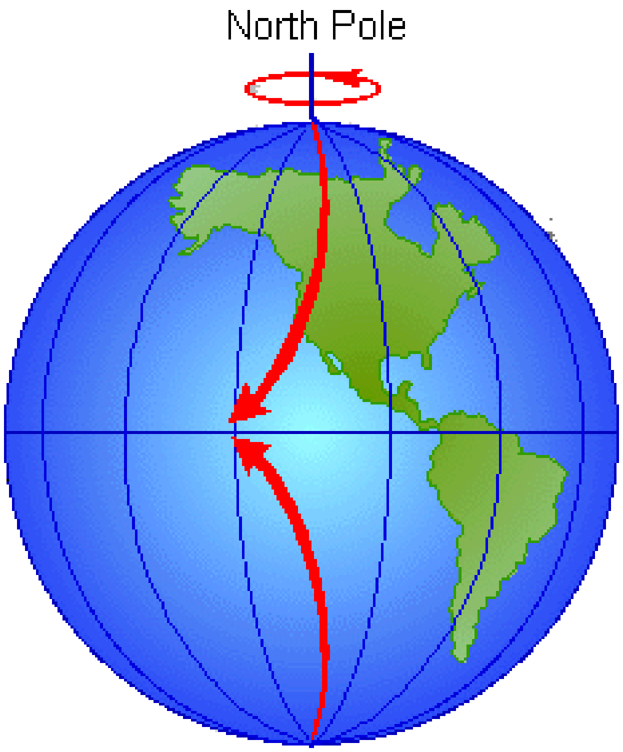


Forças de Coriolis (wikipedia)

- A força de Coriolis caracteriza-se por ser uma força de inércia que atua juntamente com a força centrífuga, sobre um corpo cujo sistema de referência se encontre em rotação.
- É perpendicular ao plano definido pelo eixo de rotação e pelo vetor velocidade.
- Existe somente em referenciais em movimento circular em relação a um inercial.

Forças de Coriolis

- Consequência prática é a que acontece com os ventos dos ciclones no hemisfério norte é para a direita e no hemisfério sul tem um sentido de rotação oposto.



Forças de Coriolis

Anticiclone no Sul

Ciclone no Norte

Coriolis Force Visualization

Coriolis Force free Throw

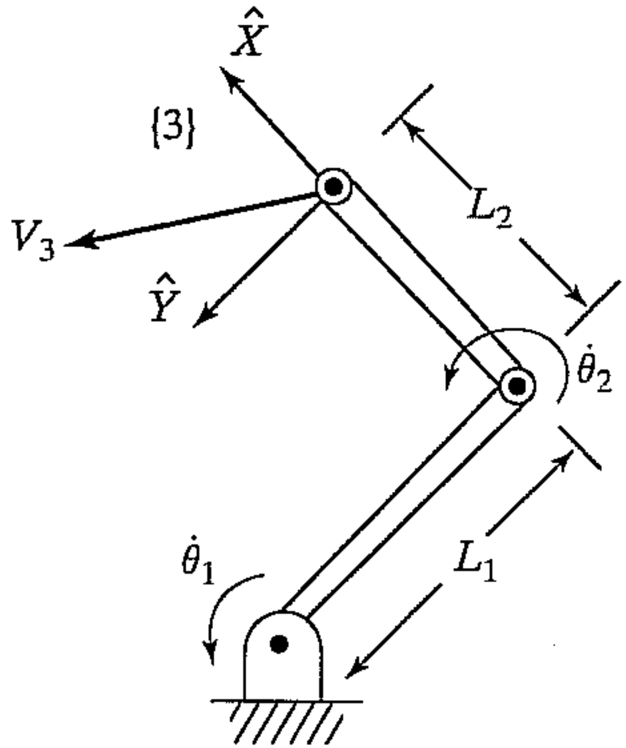
Propagando aceleração linear

- É importante saber propagar a aceleração linear em relação ao centro de massa de um elo:

$${}^{i}\dot{v}_{C_i} = {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{C_i} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i + {}^{i}P_{C_i}) + {}^{i}\dot{v}_i,$$

Exemplo 3: Acelerações no 2R (parte do exemplo na pg 177)

- Compute as equações de aceleração do manipulador 2R.



Exemplo 3: Acelerações no 2R

- A base do robô está fixa:

$$\omega_0 = 0,$$

$$\dot{\omega}_0 = 0.$$

- Para incluir a ação da gravidade, usaremos:

$${}^0\dot{v}_0 = g\hat{Y}_0.$$

Exemplo 3: Acelerações no 2R

- A rotação entre dois elos sucessivos é:

$$ {}^{i}_{i+1}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0.0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^{i+1}_{i}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0.0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. $$

Exemplo 3: Acelerações no 2R

$$^{1}\omega_1 = \dot{\theta}_1 \, ^{1}\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix},$$

$$^{1}\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 \, ^{1}\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix},$$

$$^{1}\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$^{1}\dot{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Exemplo 3: Acelerações no 2R

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, $$

Exemplo 3: Acelerações no 2R

$$
{}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^2\dot{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix},
$$

Exemplo 3: Acelerações no 2R E do {2} para o {3}?

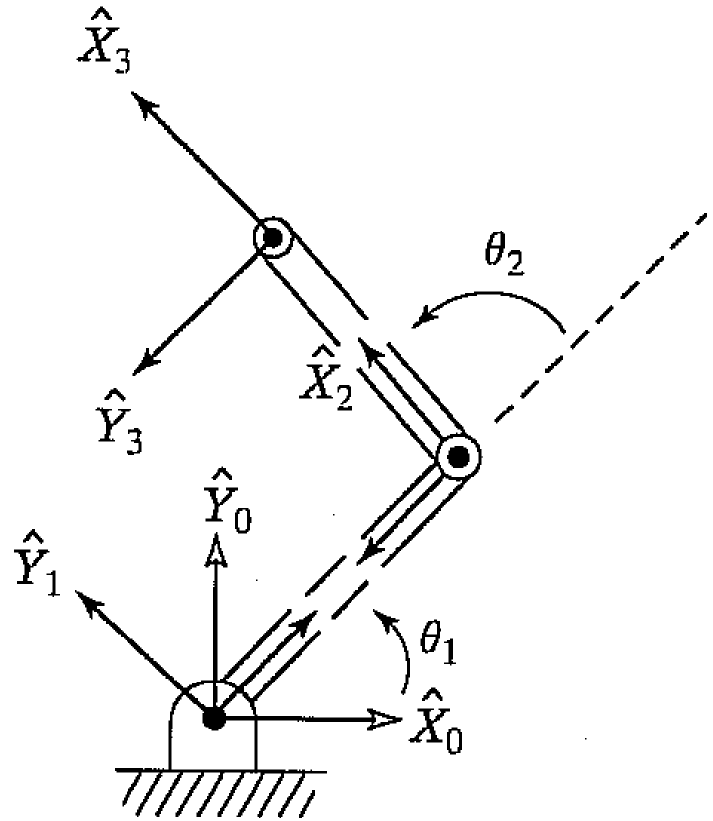


FIGURE 5.9: Frame assignments for the two-link manipulator.

Exemplo 3: Acelerações no 2R

- Trabalho: encontre a aceleração em relação ao frame {0}

$$ {}^0_3R = {}^0_1R \ {}^1_2R \ {}^2_3R = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. $$

Concluindo

- O cálculo da velocidade e da aceleração de um manipulador são bem estabelecidos na mecânica.
- É calculado de maneira igual para as duas:
  - Usa-se a propagação dos valores de velocidades e acelerações, elo a elo.

Intervalo