Robótica

Prof. Reinaldo Bianchi
Centro Universitário FEI
2016

6ª Aula

IECAT

Objetivos desta aula

- Momentos Lineares, angulares e de Inércia.
- Estática de manipuladores:
  - Propagação de forças e torques.
- Dinâmica de manipuladores:
  - Equações de Newton e Euler.
- Capítulo 5 e 6 do Craig.

Relembrando aula passada...

Propagação das velocidades

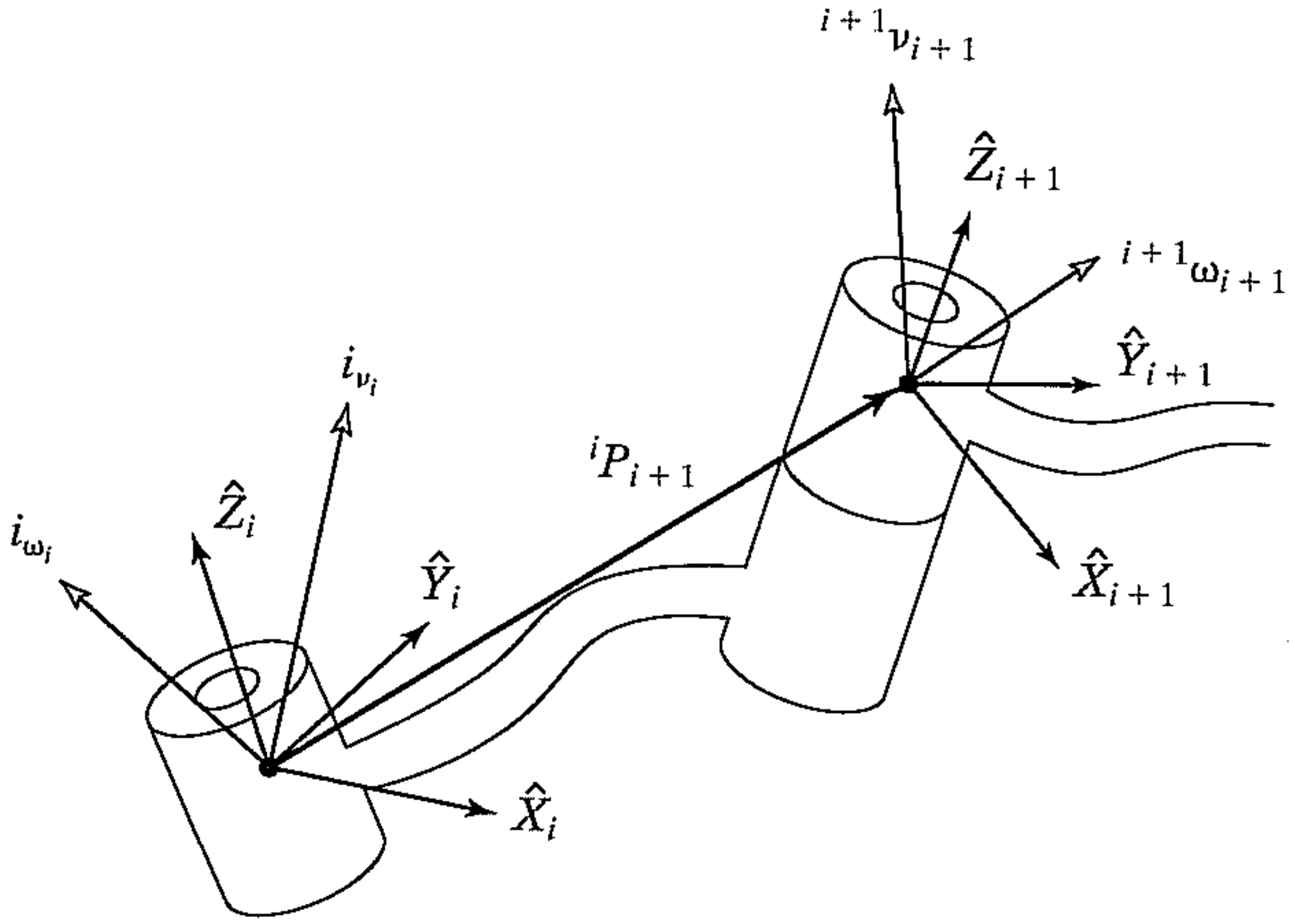
- A propagação da velocidade linear é dada pelas seguintes equações:
- Caso a junta seja de rotação:

$$ {}^{i}v_{i+1} = {}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}. $$

- No frame {i+1}:

$$ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}v_{i} + {}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}). $$

Propagando velocidades



Resumo da aula passada

- Propagação das velocidades:
  - Juntas de rotação:

$$^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R(^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}).$$

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

  - Juntas Prismáticas:

$$^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R(^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i,$$

Resumo da aula passada

- Propagação das acelerações:
  - Juntas de rotação:

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R[{}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i]$$

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

  - Juntas Prismáticas:

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i)$$

$$+ 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}.$$

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i.$$

Resumo da aula passada

- É importante saber propagar a aceleração linear em relação ao centro de massa de um elo:

$$ {}^{i}\dot{v}_{C_i} = {}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{C_i} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i + {}^{i}P_{C_i}) + {}^{i}\dot{v}_i , $$

Momentos lineares, angular e de inércia

Momentos linear e angular

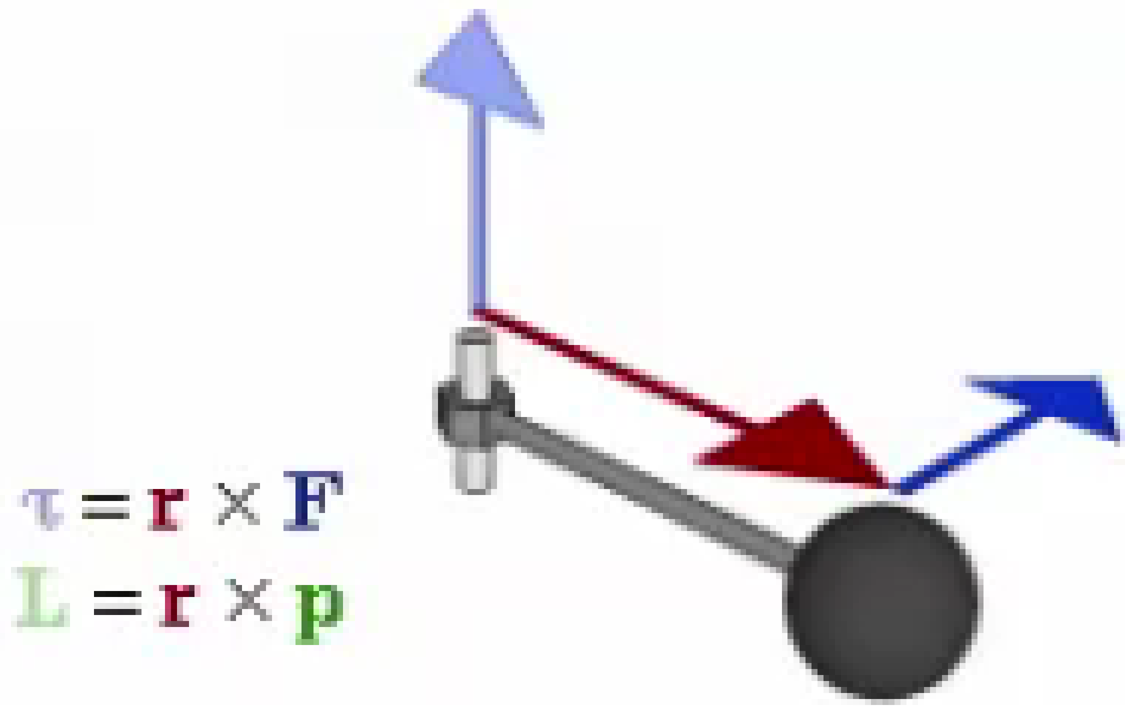
- Em sistemas com aceleração retilinea (ou linear), geralmente falamos da massa de um objeto.
- Momento Linear:
  - $p = mv$
- Em sistemas que giram em torno de um eixo, se fala em inércia do objeto.
- Momento angular:
  - $L = r \times p = I\omega$

Torques e Momentos

$$\tau = r \times F$$

$$p = mv$$

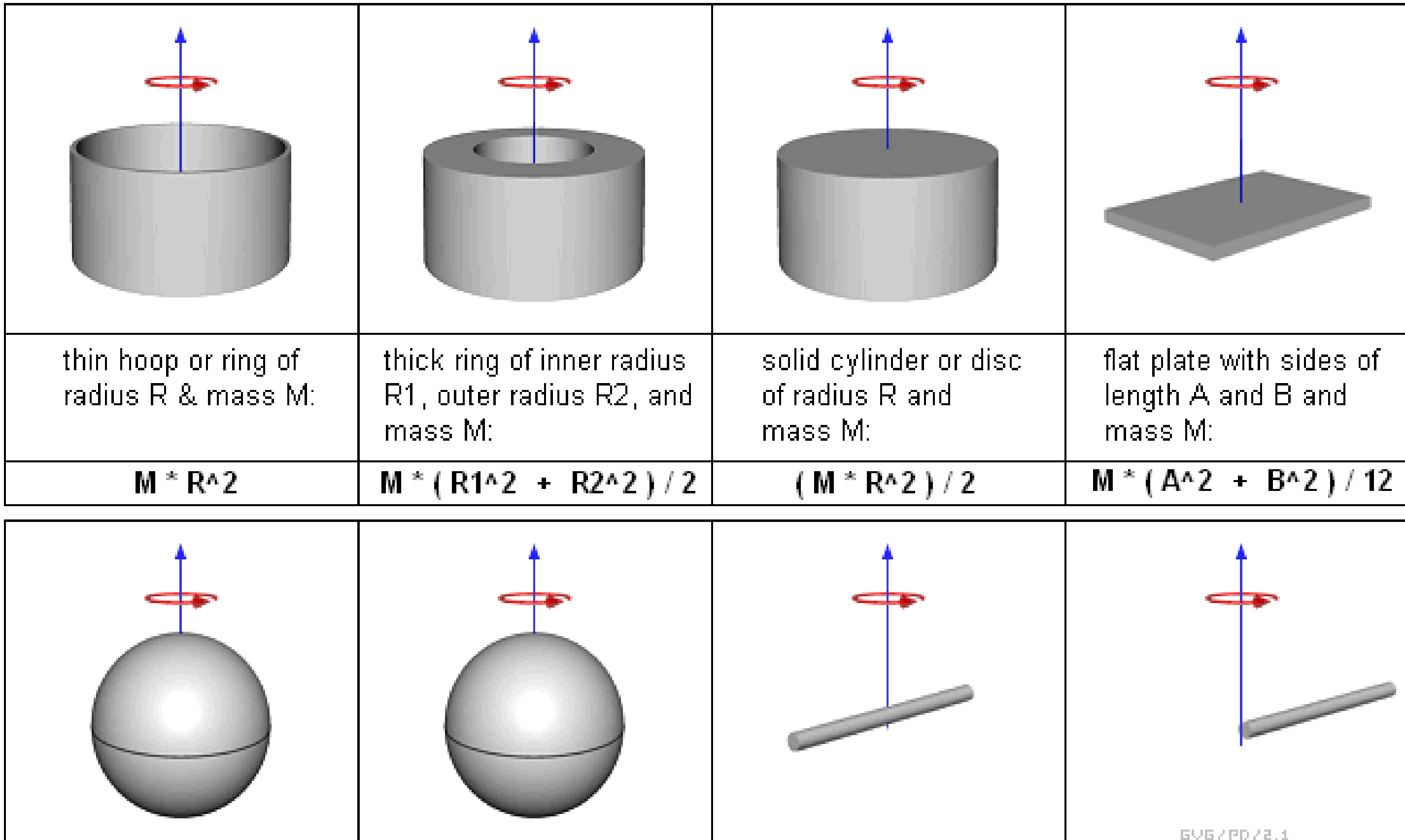
$$L = r \times p = I\omega$$



Momento de inércia

- O momento de inércia de um objeto sobre um eixo dado descreve como é difícil alterar seu movimento angular sobre esse eixo.
- Momento de Inércia de um objeto pontual girando em torno de um eixo:
  - $I = mr^2$

Momentos de inércia sobre 1 eixo



thin hoop or ring of radius R & mass M:	thick ring of inner radius R1, outer radius R2, and mass M:	solid cylinder or disc of radius R and mass M:	flat plate with sides of length A and B and mass M:
M * R^2	M * (R1^2 + R2^2) / 2	(M * R^2) / 2	M * (A^2 + B^2) / 12
solid sphere of radius R and mass M:	thin-walled hollow sphere of radius R & mass M:	slender rod of length L and mass M, spinning around center:	slender rod of length L and mass M, spinning around end:
(2 / 5) * M * R^2	(2 / 3) * M * R^2	(M * L ^ 2) / 12	(M * L ^ 2) / 3

MOMENTS OF INERTIA

Distribuição de massa

- Em um sistema que pode se deslocar em três dimensões, com possibilidade de rotação em infinitos eixos, é necessário ter uma maneira de caracterizar a distribuição de massa no corpo rigido.

Tensor de Inercia

- É a generalização para 3D do momento de inércia de um objeto.
- Momento de Inércia de um objeto em relação ao frame {A}:

$$
{}^{A}I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}
$$

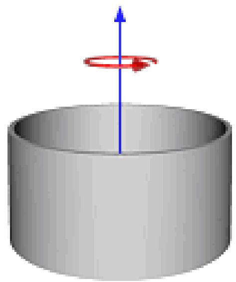
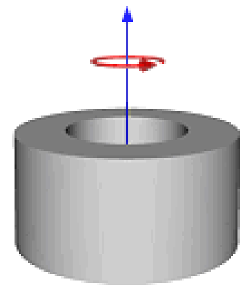
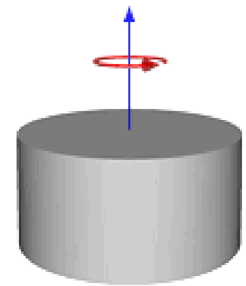
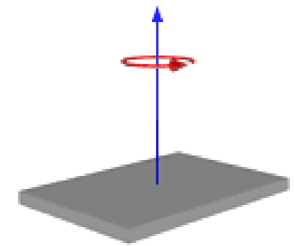
$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2)\rho dv, \\
I_{yy} &= \iiint_V (x^2 + z^2)\rho dv, \\
I_{zz} &= \iiint_V (x^2 + y^2)\rho dv, \\
I_{xy} &= \iiint_V xy\rho dv, \\
I_{xz} &= \iiint_V xz\rho dv, \\
I_{yz} &= \iiint_V yz\rho dv,
\end{aligned}
$$

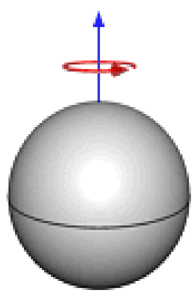
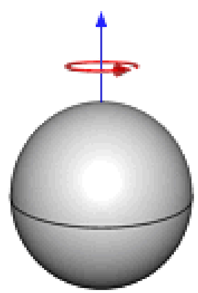
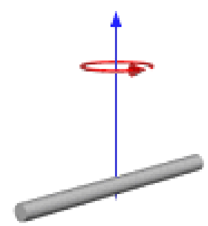
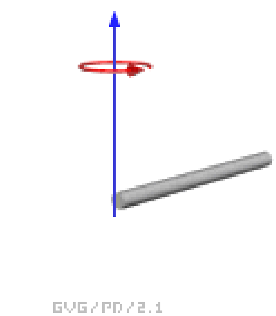
Exemplo:
Tensor de Inercia para o Cubo

$$
{}^{C}I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(\omega^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l^2 + \omega^2) \end{bmatrix}
$$

- Exemplo 6.1, pg 169 do livro do Craig, 2ª. Ed, em inglês.

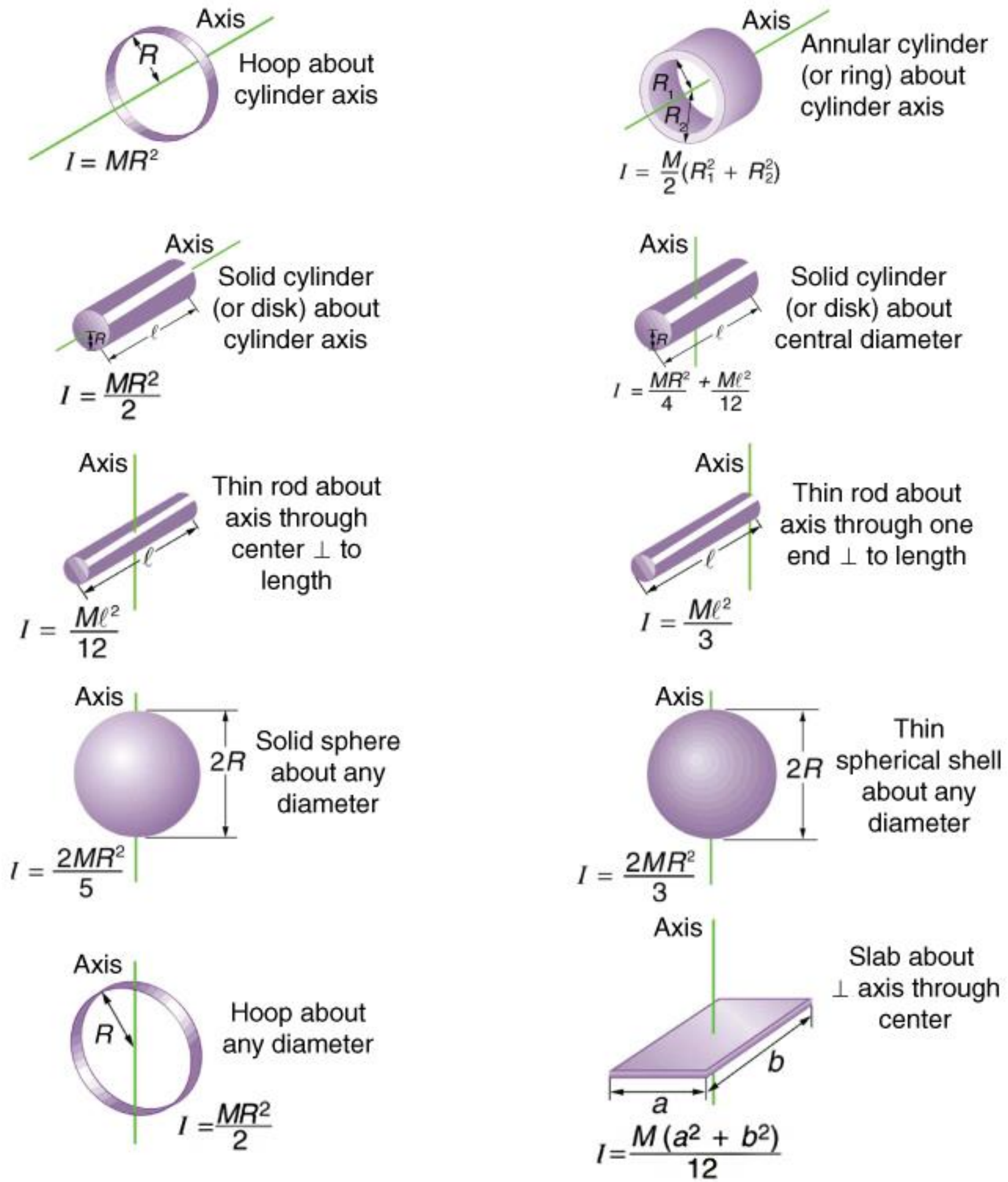
Momentos de inércia sobre 1 eixo

			
thin hoop or ring of radius R & mass M:	thick ring of inner radius R1, outer radius R2, and mass M:	solid cylinder or disc of radius R and mass M:	flat plate with sides of length A and B and mass M:
$M * R\char`^2$	$M * (R1\char`^2 + R2\char`^2) / 2$	$(M * R\char`^2) / 2$	$M * (A\char`^2 + B\char`^2) / 12$

			
solid sphere of radius R and mass M:	thin-walled hollow sphere of radius R & mass M:	slender rod of length L and mass M, spinning around center:	slender rod of length L and mass M, spinning around end:
$(2 / 5) * M * R\char`^2$	$(2 / 3) * M * R\char`^2$	$(M * L \char`^ 2) / 12$	$(M * L \char`^ 2) / 3$

MOMENTS OF INERTIA

Momentos de inércia sobre 1 eixo



Estática de Manipuladores

Estática: relativo a corpos em repouso com forças em equilíbrio.

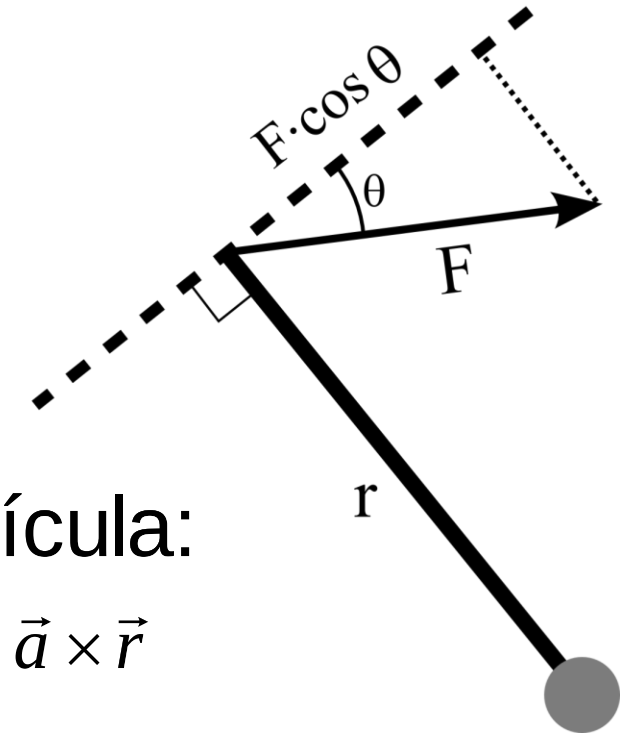
(Webster dictionary)

Calculando forças e torques

- A natureza dos manipulador nos leva naturalmente a considerar a maneira pela qual forças, torques e momentos podem ser propagados de um elo ao próximo.
  - Como calcular as forças/torques necessários para manter um manipulador em equilíbrio estático?

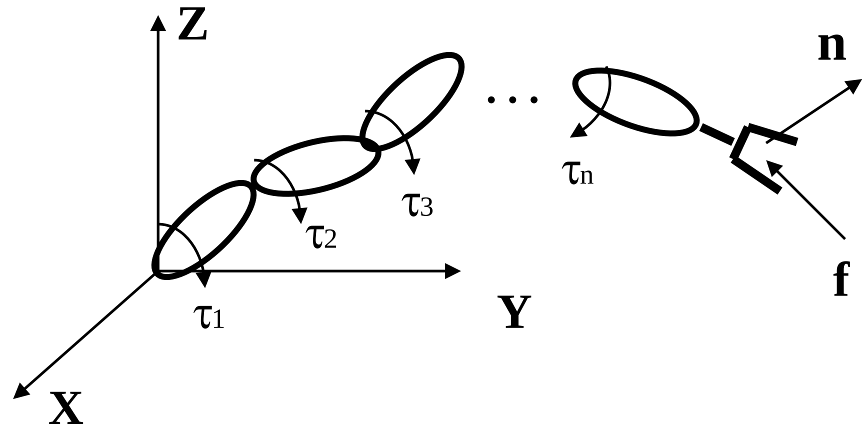
Relembrando mecânica 1

- Força:
  - $F = ma = \frac{d}{dt} mv$
- Torque sobre uma partícula:
  - Vetorial: $\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r} = m \cdot \vec{a} \times \vec{r}$
  - Valor escalar: $n = m \cdot a \cdot r \cdot \cos(\theta)$
  - Onde θ é o ângulo entre a força e r



Análise Estática

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$



- Com o torque pode-se calcular o tamanho dos motores, o consumo de energia, etc…

Força e Torque em um elo

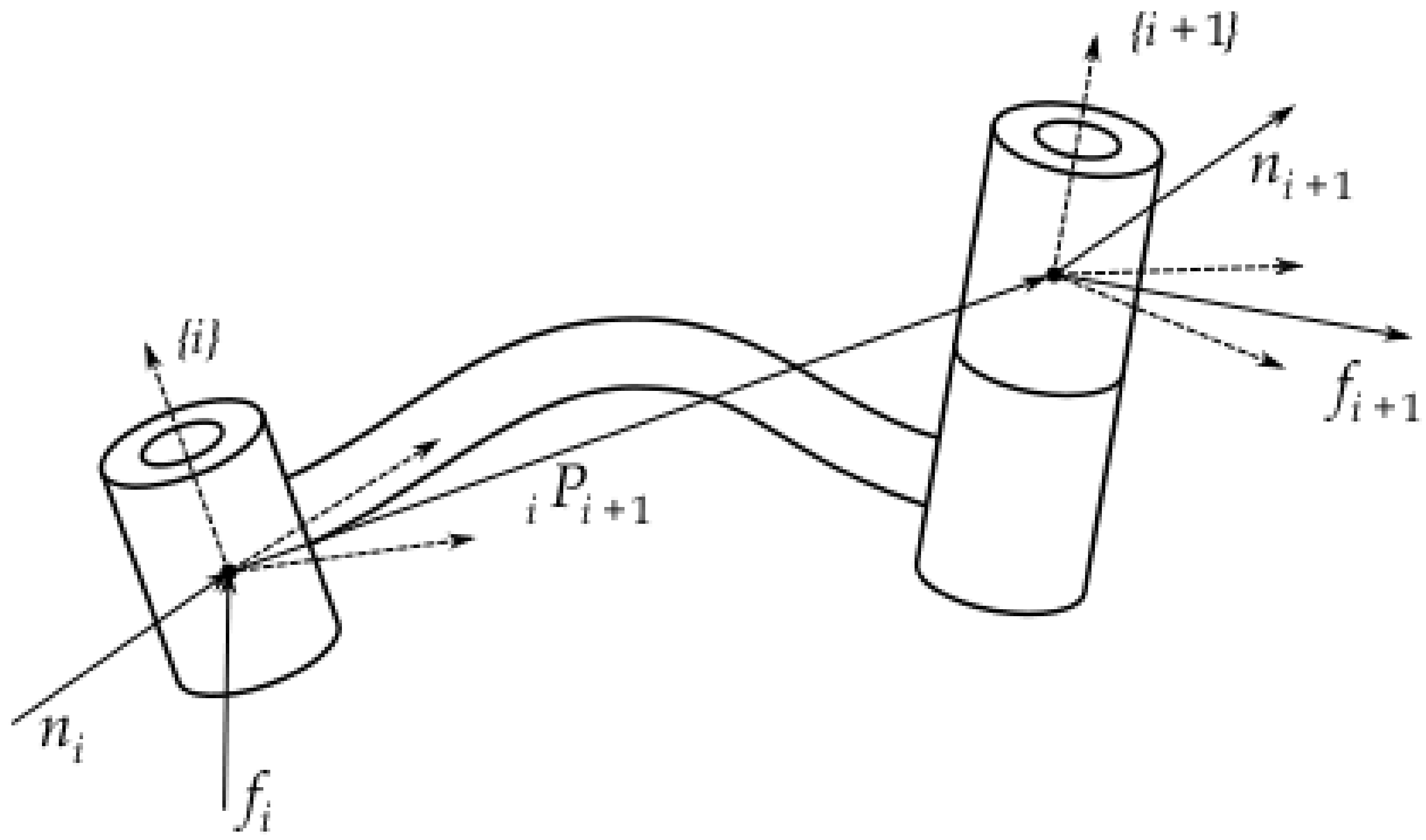
- Qual é o torque e a força em um elo, considerando apenas o próximo elo (sem considerar gravidade e em repouso)?
- Força:

$$^{i}f_i = {}^{i}f_{i+1}$$

- Torque:

$$^{i}n_i = {}^{i}n_{i+1} + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}f_{i+1}$$

Força e Torque em um elo



Algoritmo para cálculo estático

- 1) Considere o manipulador como uma estrutura estática.
- 2) Calcule a relação de equilíbrio para cada elo.
- 3) Compute o torque estático necessário em cada junta para manter o manipulador em equilíbrio:
  - – suportando ou não uma carga na ponta.

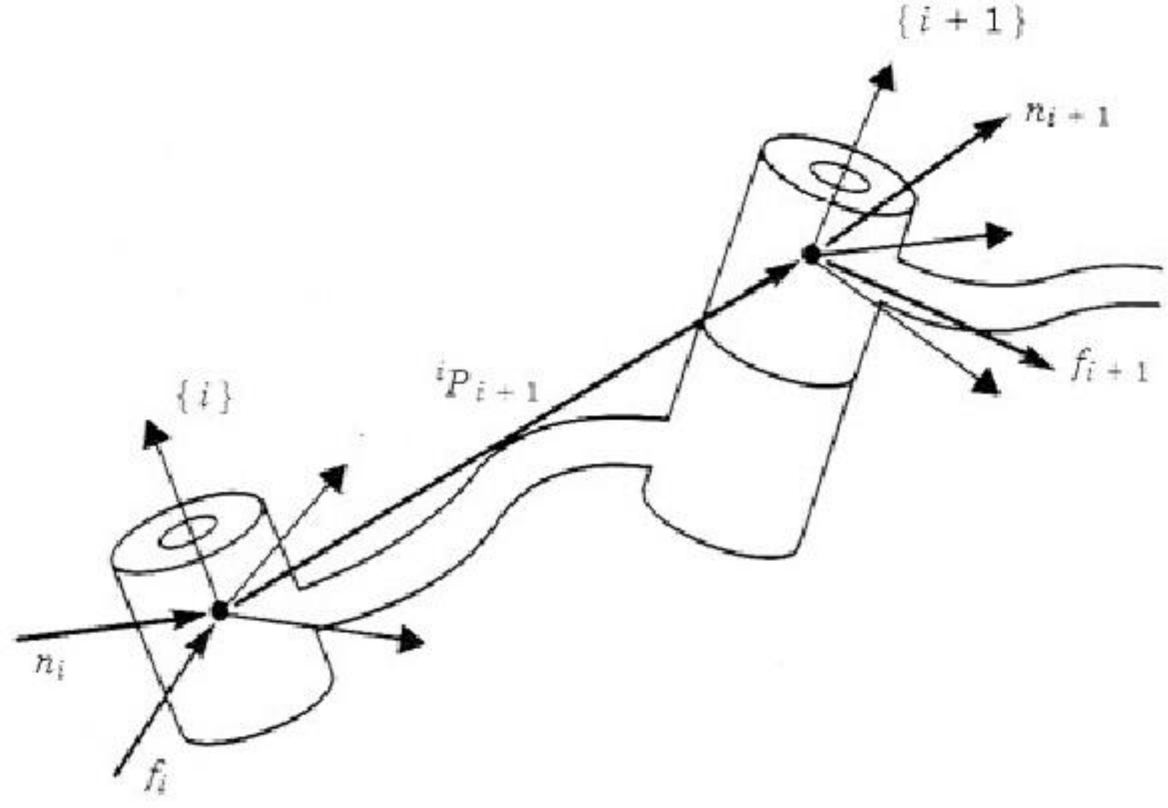
Relações de equilíbrio

- A soma das forças deve ser zero:
  - $^{i}f_{i}$ = força exercida no elo *i* pelo elo *i*-*1*
  - $^{i}f_{i} - ^{i}f_{i+1} = 0$
- A soma dos torques deve ser zero:

$$^{i}n_{i} - ^{i}n_{i+1} - ^{i}P_{i+1} \times ^{i}f_{i+1} = 0$$

  - onde P_{i+1} é a distância entre os centros dos frames *i* e *i+1*

Relações de equilíbrio



Relações de equilíbrio

- Para descrever estas relações considerando apenas as forças em um próprio frame, adicionamos a transformação que leva do frame i+1 ao frame i:

$$^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\ {}^{i+1}f_{i+1}$$

$$^{i}n_i = {}^{i}_{i+1}R\ {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}f_i$$

Propagando forças

$$ {}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R \; {}^{i+1}f_{i+1} $$

$$ {}^{i}n_i = {}^{i}_{i+1}R \; {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}f_i $$

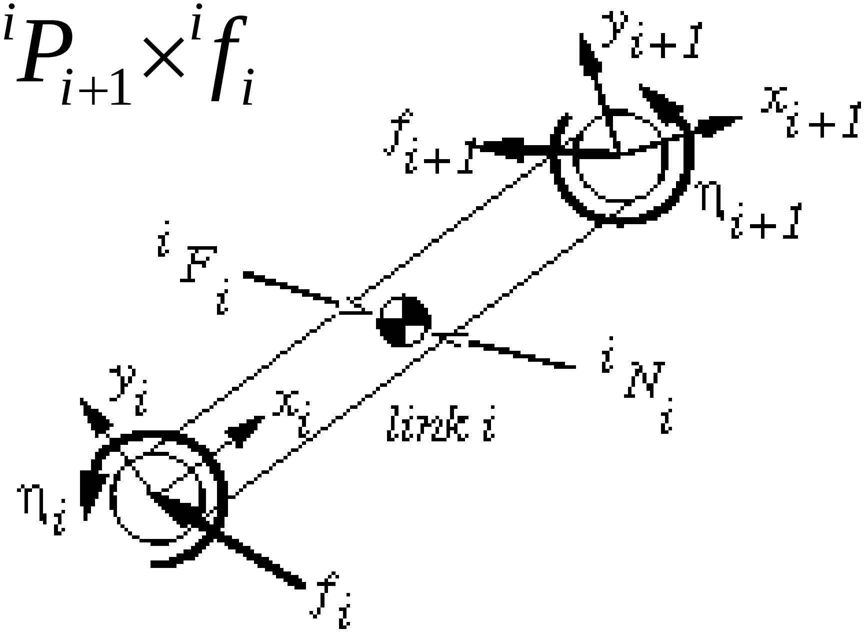


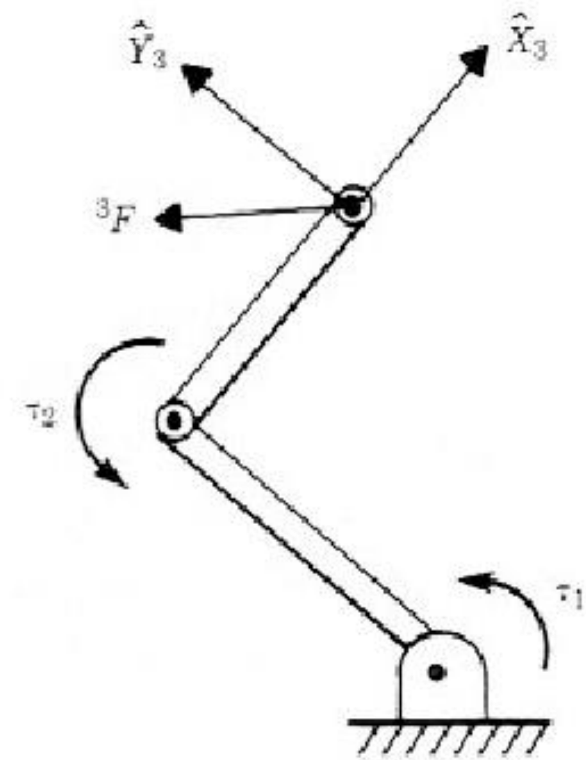
Figure 4.10 *The propagation of forces in a kinematic chain.*

Torque nas juntas

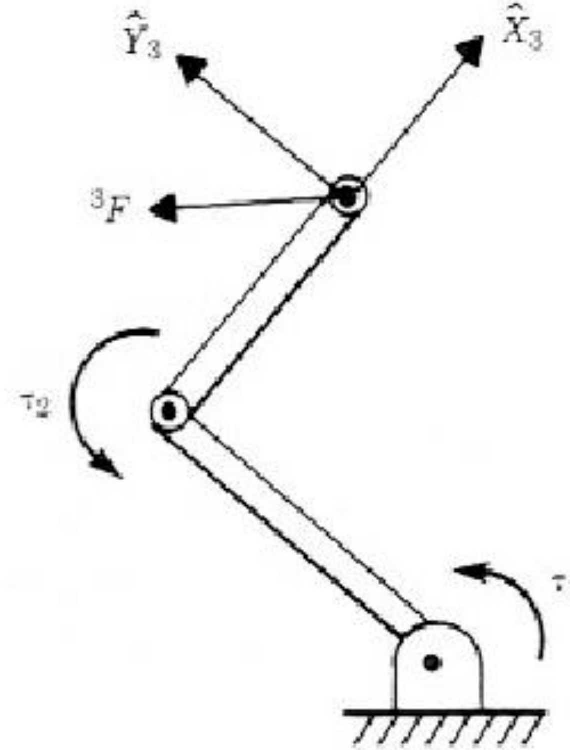
- Qual o torque exercido em cada junta para manter as condições de equilíbrio estático?
  - Junta de rotação: $\tau_i = {}^i n_i^T \cdot {}^i\hat{Z}_i$
  - Junta prismática: $\tau_i = {}^i f_i^T \cdot {}^i\hat{Z}_i$

Exemplo 1: 2R (pg 155 do livro)

The two-link manipulator of Example 5.2 is applying a force vector ${}^3F$ with its end-effector (consider this force to be acting at the origin of {3}). Find the required joint torques as a function of configuration and of the applied force. See Fig. 5.12.



Solução



$$ {}^2f_2 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^2n_2 = l_2\hat{X}_2 \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix}, $$

$$ {}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^1n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + l_1\hat{X}_1 \times {}^1f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{bmatrix}. $$

Solução

- Os torques são:

$$\tau_1 = l_1 s_2 f_x + (l_2 + l_1 c_2) f_y,$$

$$\tau_2 = l_2 f_y.$$

- Que podem ser escritos na forma matricial:

$$\tau = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_2 + l_1 c_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}.$$

Dinâmica de Manipuladores

Dinâmica: Ramo da ciência que trata da ação da força em corpos físicos, em movimento ou em repouso, considerando a cinética, cinemática, e estática todas coletivamente.

(Webster dictionary)

Leis da Dinâmica

Leis de Newton

Leis de Euler

Leis de Newton

- Lei I: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.
- Lei II: A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é imprimida.
- Lei III: A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: ou as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

- Lei I: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.

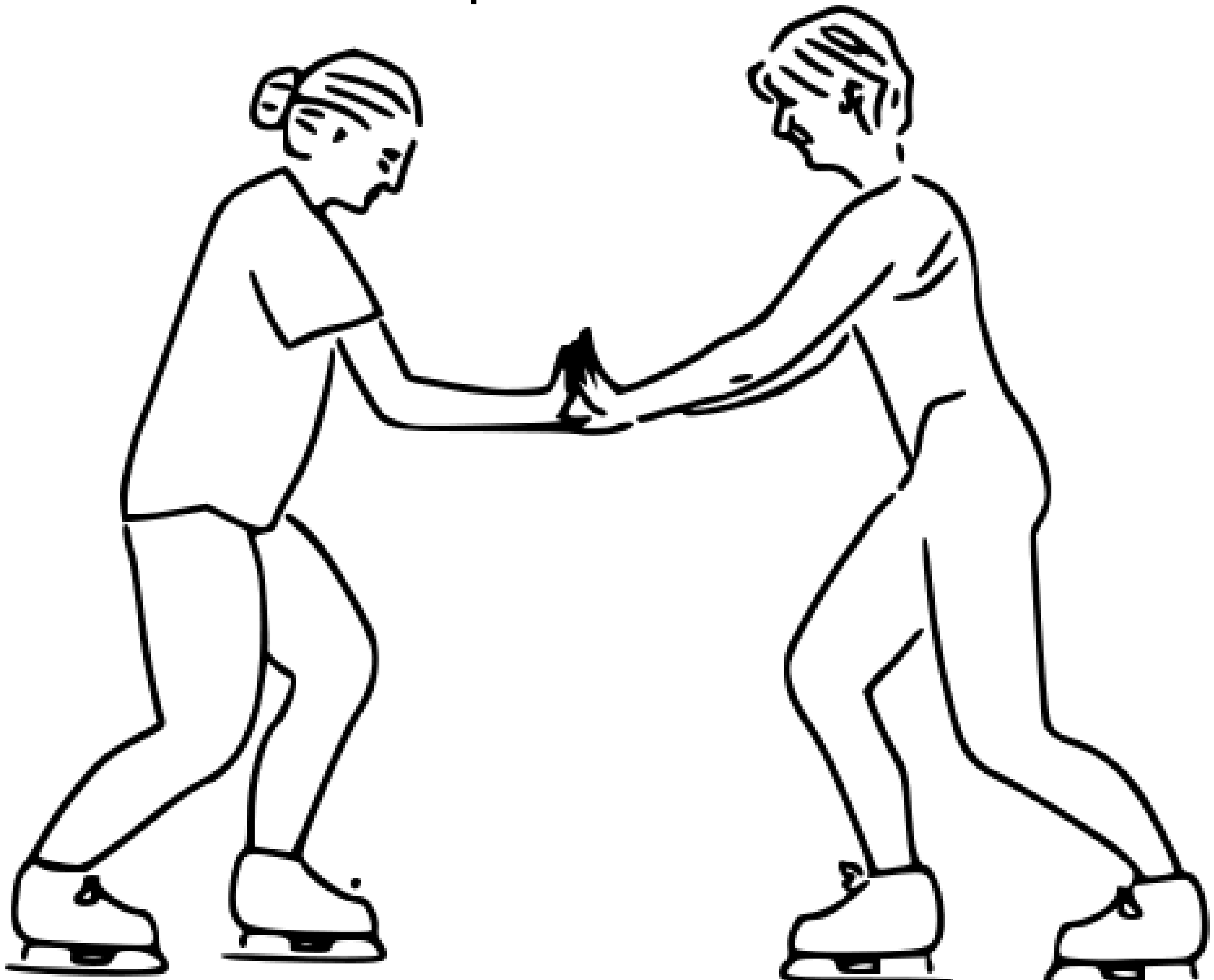
- Lei II: A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é imprimida.

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t},$$

$$\vec{F} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a},$$

$$\vec{F} = \vec{v}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\dot{m}$$

- Lei III: A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: ou as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.



Equação de Newton

- Uma das leis de Newton é importante para Robótica.
- Se um corpo rígido possui alguma aceleração em seu centro de massa, ela deve ser causada por uma força externa tal que:

$$F = m\dot{v}_C$$

Equação de Newton

- $F = m\dot{v}_C$

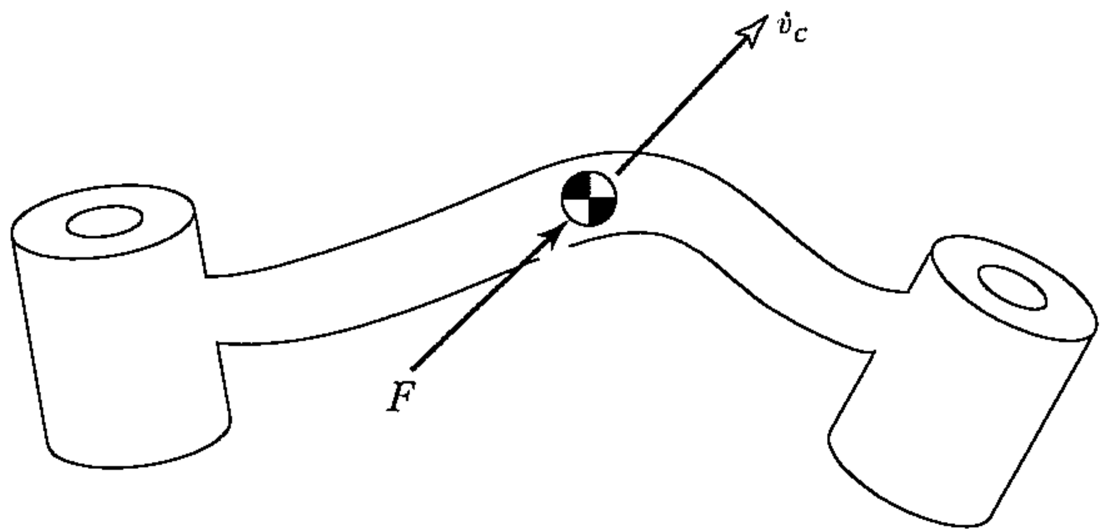


FIGURE 6.3: A force F acting at the center of mass of a body causes the body to accelerate at $\dot{v}_C$.

Equações de Euler

- As equações de Euler descrevem o movimento de um corpo rígido em rotação em relação aum sistema de referência de referência inercial:
  – A derivada do momento angular é igual ao momento dinâmico ou momento de força aplicada:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\mathrm{rot}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}$$

Equação de Euler

- Seu um corpo rígido está em rotação girando com velocidade angular ω e com aceleração $\dot{\omega}$, então existe um momento externo N que deve estar agindo sobre o corpo para causar esse movimento.
- Ele é dado pela equação de Euler:

$$N = {}^{C}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{C}I\omega,$$

Equação de Euler

- $N = {}^{C}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{C}I\omega,$

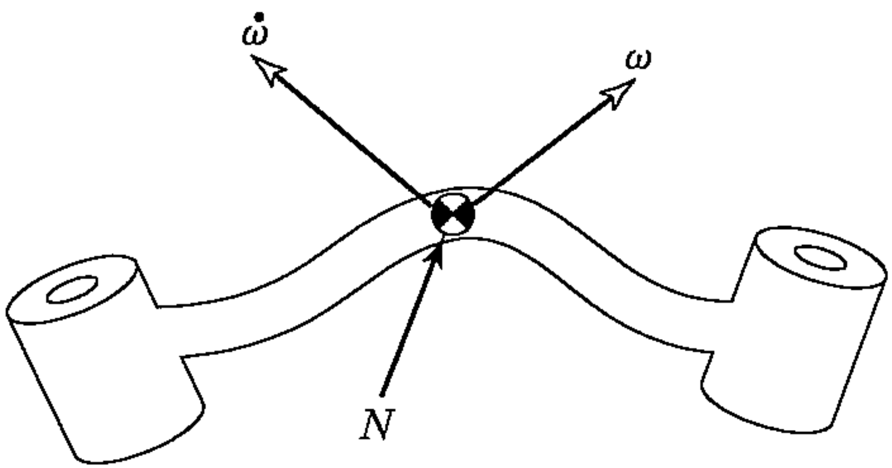
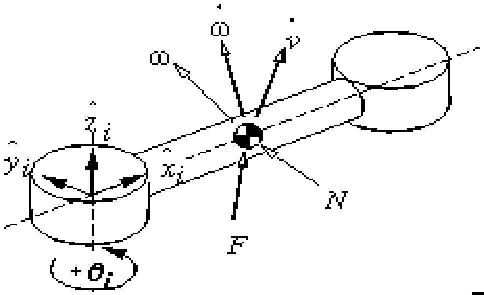


FIGURE 6.4: A moment N is acting on a body, and the body is rotating with velocity ω and accelerating at $\dot{\omega}$.

Newton versus Euler

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\dot{v}$$



$$\tau = \frac{d}{dt}\left[M\dot{\theta}\right] = M\ddot{\theta}$$

Newton's Equation

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_i m_i v_i) = \mathbf{R}_i m_i \dot{v}_i + \dot{\mathbf{R}}_i m_i v_i \\ &= \mathbf{R}_i\left[m_i \dot{v}_i + (\omega_i \times m_i v_i)\right] \end{aligned}$$

Euler's Equation

$$\begin{aligned} N &= \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_i M_i \omega_i) \\ &= \mathbf{R}_i\left[M_i \dot{\omega}_i + (\omega_i \times M_i \omega_i)\right] \end{aligned}$$

F=força (líquida) e N=torque

Ri = matriz de rotação relacionando frame i com o inercial

Algoritmo Iterativo de Newton-Euler

Algoritmo Iterativo de Newton-Euler

- Como computar os torques correspondentes a qualquer ponto da trajetória do manipulador em movimento?
- Dado que a posição, a velocidade e a aceleração das juntas são conhecidas, pode-se calcular os torques necessários.

Algoritmo Iterativo de Newton-Euler

- O algoritmo é iterativo:
  - É necessário calcular as velocidades e acelerações a cada momento, no centro de massa de cada junta.
- Nota:
  - F e N = forcas e momentos externos
  - f e n = forcas e momentos aplicados pelas juntas.

Algoritmo Iterativo de Newton-Euler

- Funciona em dois estágios:
  - Outwards: calcula velocidades, acelerações, forças e torques que atuam no centro de massa de cada elo, indo de elo a elo a partir do elo zero.
  - Inwards: calcula o torque de junta, que deve ser aplicado nas juntas para que o sistema esteja em equilíbrio, de cada elo, indo do ultimo elo para o primeiro.

Algoritmo Iterativo de Newton-Euler

- Primeiro estágio (outwards):
  - Calcula velocidades e acelerações como já visto no início da aula.
  - Força agindo no elo (de Newton):

$$F_i = m\dot{v}_{C_i}$$

  - Torque agindo no elo (de Euler):

$$N_i = {}^{C_i}I\dot{\omega}_i + \omega_i \times {}^{C_i}I\omega_i$$

Algoritmo Iterativo de Newton-Euler

- Segundo estágio (inwards):
  - Calcula as forças e o torque de junta, a partir da condição de equilíbrio.
  - Forças:

$$ {}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R \, {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i $$

  - Torques:

$$ {}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R \, {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R \, {}^{i+1}f_{i+1} $$

Estágio de propagação (outwards)

Outward iterations: $i : 0 \rightarrow 5$

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}, \\
{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}, \\
{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_i), \\
{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} \\
&\quad + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}, \\
{}^{i+1}F_{i+1} &= m_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}, \\
{}^{i+1}N_{i+1} &= {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\, {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\, {}^{i+1}\omega_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Estágio de volta (inwards)

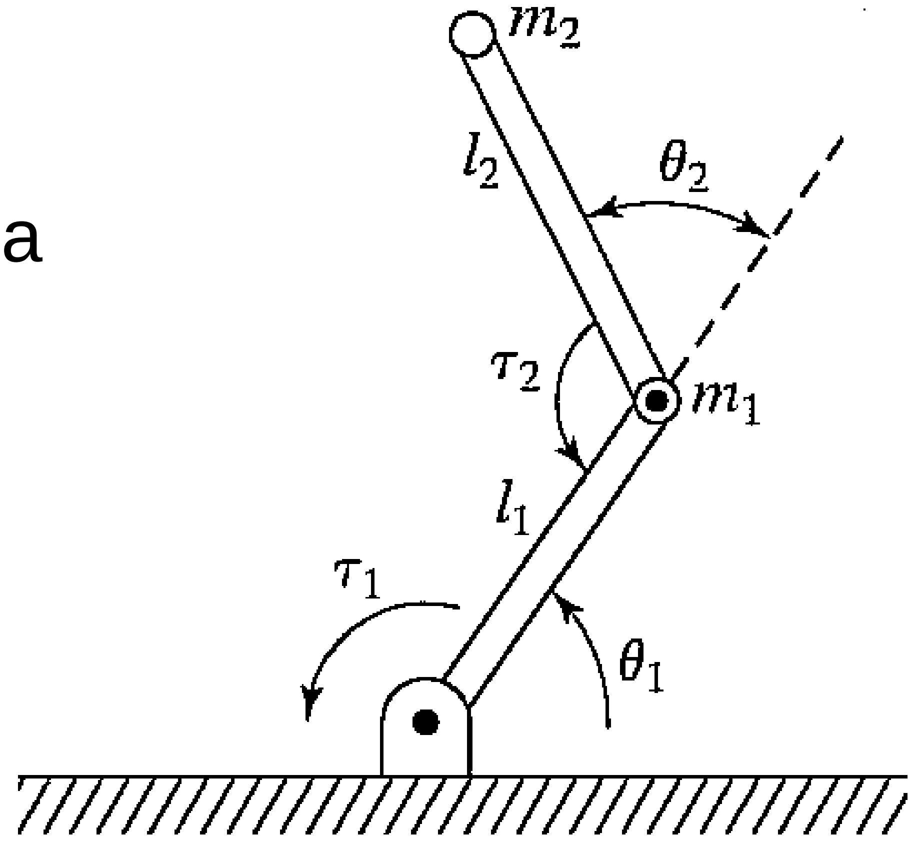
Inward iterations: $i : 6 \rightarrow 1$

$$
\begin{aligned}
{}^{i}f_i &= {}^{i}_{i+1}R \, {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i, \\
{}^{i}n_i &= {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R \, {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i \\
&\quad + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R \, {}^{i+1}f_{i+1}, \\
\tau_i &= {}^{i}n_i^T \, {}^{i}\hat{Z}_i.
\end{aligned}
$$

- A gravidade pode ser adicionada fazendo que a aceleração no elo zero seja igual a g.

Exemplo 4: 2R, pg 177

- Compute as equações da dinâmica do manipulador 2R.
- Simplificação:
  – Assuma que toda massa do elo está na ponta dele.

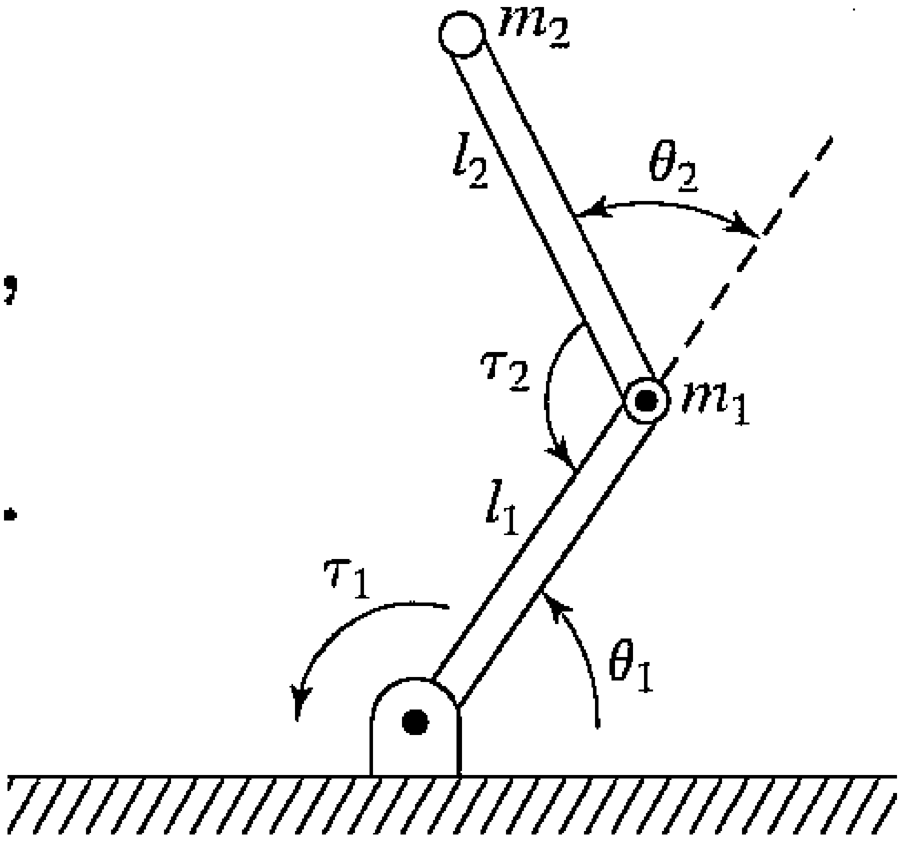


Exemplo 4: 2R, pg 177

- As posições dos centros de massa:

$$^{1}P_{C_1} = l_1 \hat{X}_1,$$

$$^{2}P_{C_2} = l_2 \hat{X}_2.$$

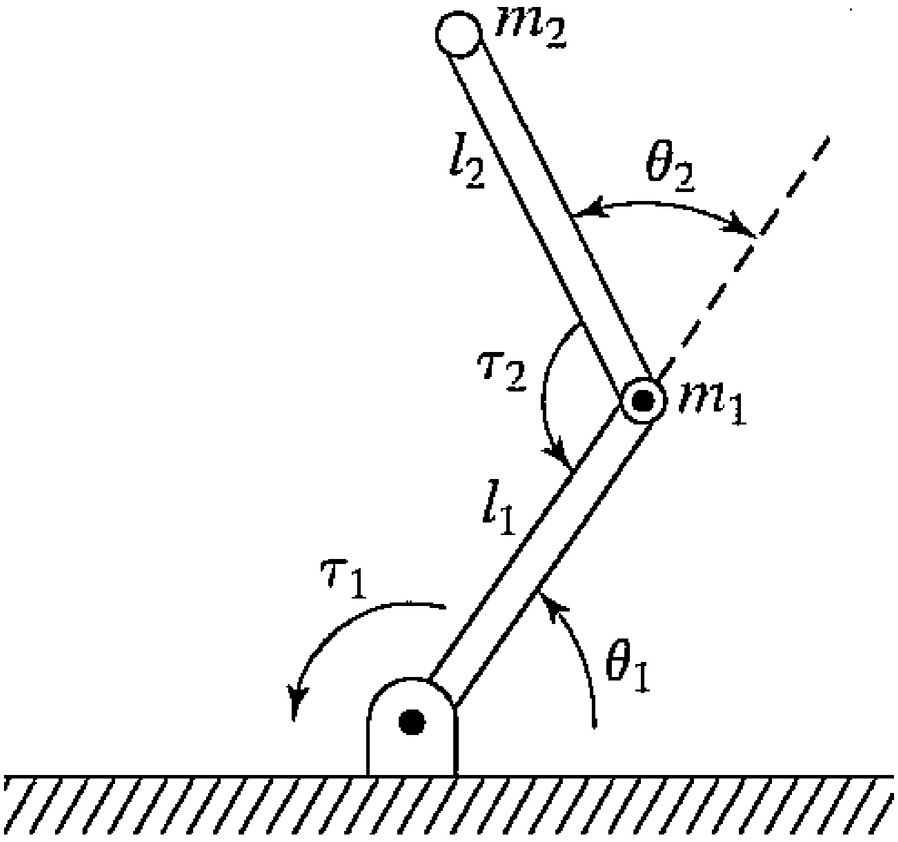


Exemplo 4: 2R, pg 177

- As distâncias entre os sistemas de referência:

$$^{0}P_{1} = 0$$

$$^{1}P_{2} = 0$$

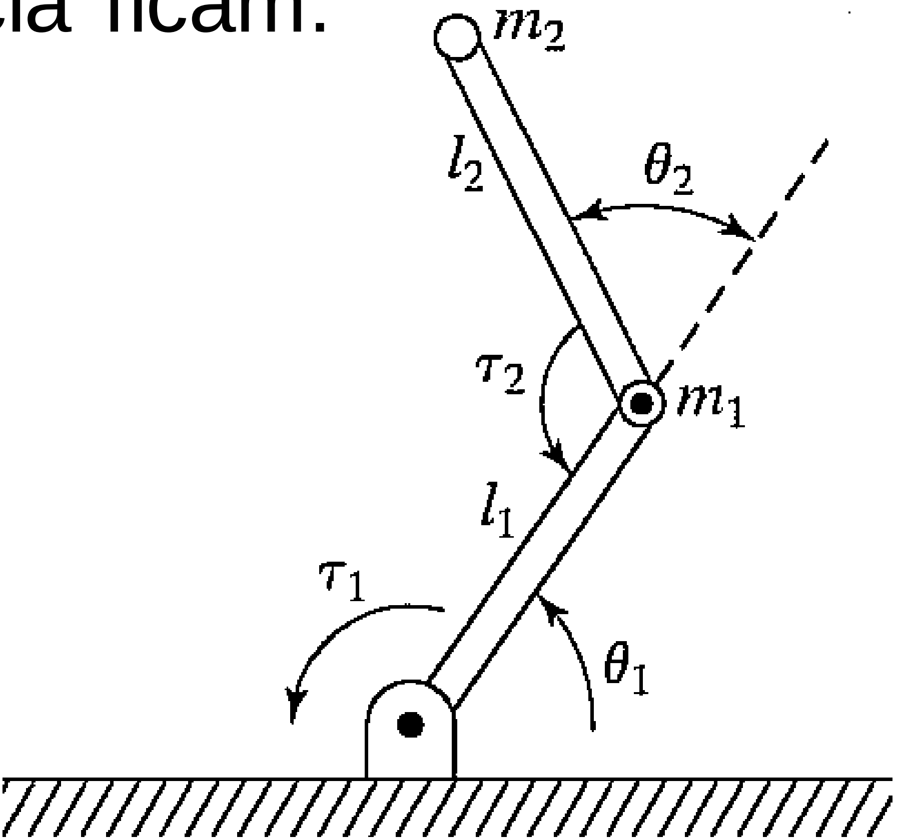


Exemplo 4: 2R, pg 177

- Como as massas são pontuais, as matrizes de inércia ficam:

$$^{C_1}I_1 = 0,$$

$$^{C_2}I_2 = 0.$$

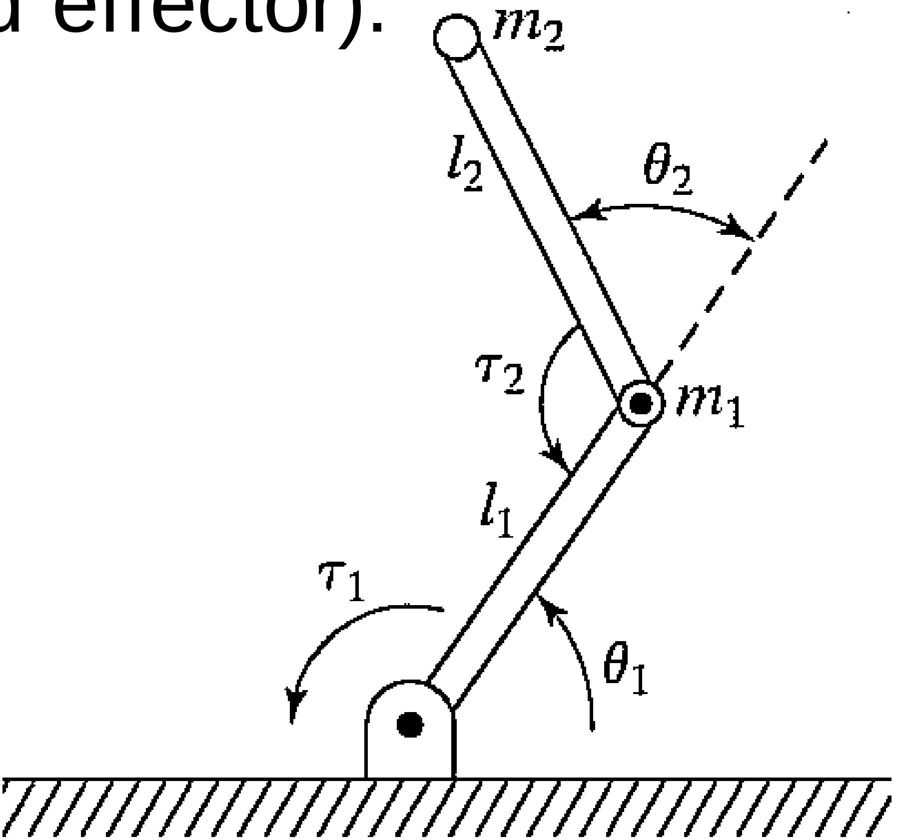


Exemplo 4: 2R, pg 177

- Não existe força atuando na ponta do manipulador (end effector):

$$f_3 = 0,$$

$$n_3 = 0.$$

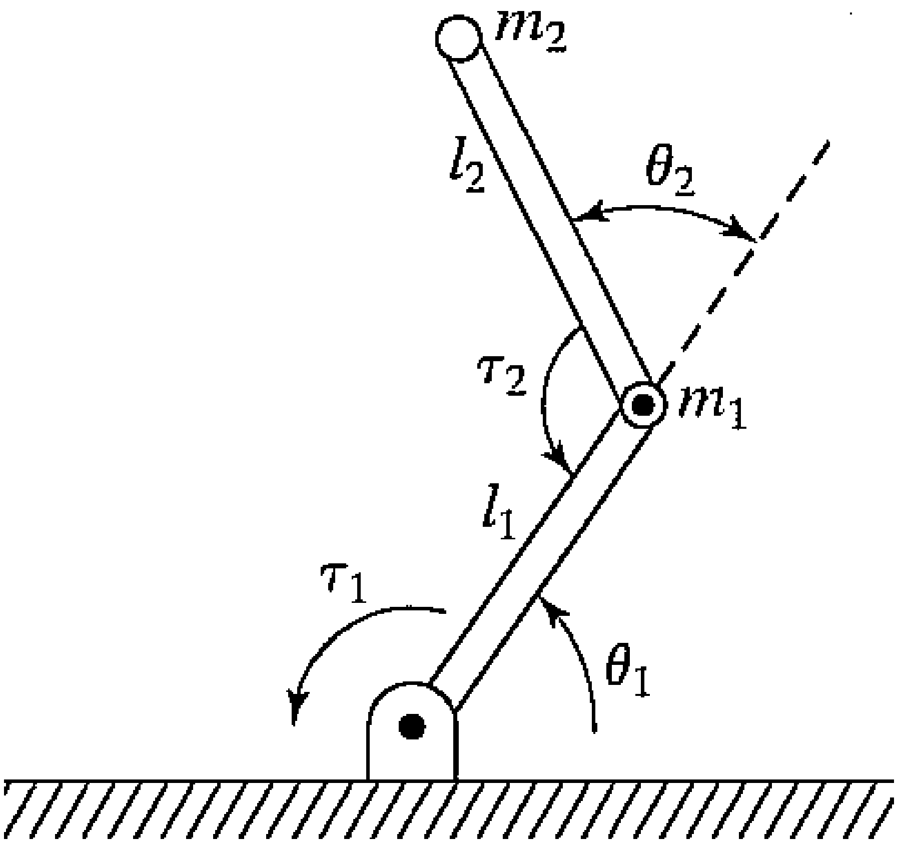


Exemplo 4: 2R, pg 177

- A base do robô está fixa:

$$\omega_0 = 0,$$

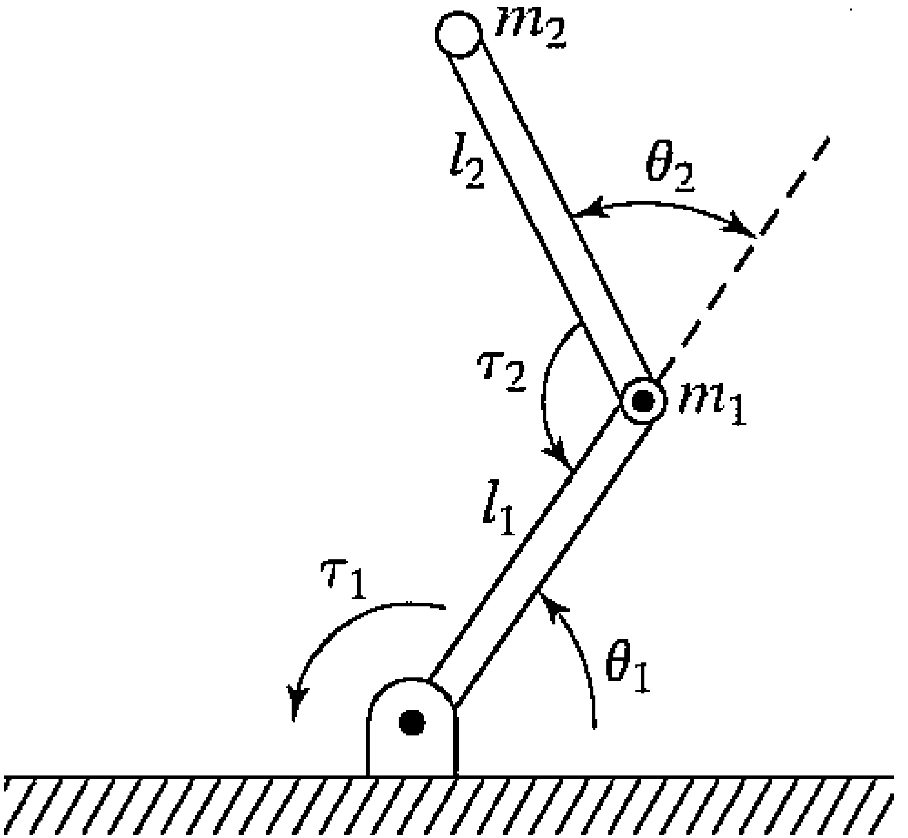
$$\dot{\omega}_0 = 0.$$



Exemplo 4: 2R, pg 177

- Para incluir a ação da gravidade, usaremos:

$$^{0}\dot{v}_{0} = g\hat{Y}_{0}.$$

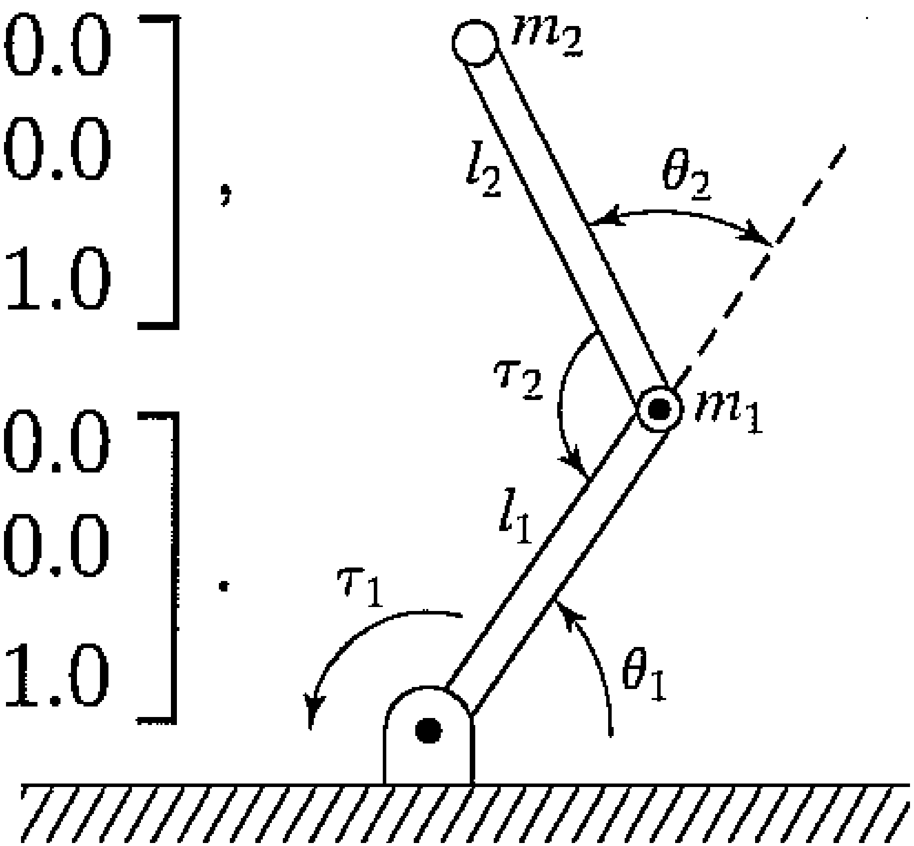


Exemplo 4: 2R, pg 177

- A rotação entre dois elos sucessivos é:

$$ {}^{i}_{i+1}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0.0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, $$

$$ {}^{i+1}_{i}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0.0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}. $$



Exemplo 4: Propagando elo 1

$$^1\omega_1 = \dot{\theta}_1 \, {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix},$$

$$^1\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 \, {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix},$$

$$^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$^1\dot{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Exemplo 4: Propagando elo 1

$$
{}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Exemplo 4: Propagando elo 2

$$^{2}\omega_{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

$$^{2}\dot{\omega}_{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

Exemplo 4: Propagando elo 2

$$
{}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^2\dot{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix},
$$

Exemplo 4: Propagando elo 2

$$
{}^2F_2 = \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
{}^2N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Exemplo 4: Computando Torque de juntas elo 2 (Inward)

$$ {}^2f_2 = {}^2F_2, $$

$$ {}^2n_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} $$

Exemplo 4: Computando Força elo 1 (Inward)

$$
{}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

Exemplo 4: Computando Torque de junta elo 1 (Inward)

$$
{}^{1}n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c_1 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 g s_2 s_{12} \\ + m_2 l_1 l_2 c_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 g c_2 c_{12} \end{bmatrix}.
$$

Exemplo 4: Resultado

- Retirando as componentes que dependem apenas do eixo Z, temos:

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

- Equações dão o torque a partir das velocidades e acelerações das juntas.

Equação do Movimento

Equação de movimento

- Quando as equações de Newton-Euler são solucionadas simbolicamente para um manipulador, elas geram ur resultado que pode ser escrito como:

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

- Esta é a equação de espaço-estado do manipulador.

Equações de movimento

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

- M é uma $(n \times n)$ matriz de massas do manipulador, com termos dependentes da aceleração.
- V é um $(n \times 1)$ vetor de forças centrífugas e de Coriolis, dependentes da velocidade.
- G é uma $(n \times 1)$ vetor que contém todos os termos dependentes da gravidade.

Exemplo 5: 2R (pg 180)

- Dado o resultado dos torques do manipulador 2R do exemplo 4, podemos reagrupar os elementos na forma da equação de movimento.
- A equação de movimento é apenas uma forma mais conveniente de escrever o mesmo resultado.

Exemplo 5: 2R (pg 180)

- Dado:

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

- Reagrupe os termos que dependem da massa, velocidade de junta e gravidade.

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2 l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = \boxed{m_2 l_2^2(\ddot\theta_1} + \ddot\theta_2) + \boxed{m_2 l_1 l_2 c_2(2\ddot\theta_1} + \ddot\theta_2) + \boxed{(m_1+m_2) l_1^2 \ddot\theta_1} - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1+m_2) l_1 g c_1,$$

$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2(\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2).$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} \boxed{l_2^2 m_2} + \boxed{2 l_1 l_2 m_2 c_2} + \boxed{l_1^2 (m_1+m_2)} & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\quad + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2(\quad + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$

$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2 l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \boxed{m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)} + \boxed{m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)} + \boxed{(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1} - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1, \\
\tau_2 &= \boxed{m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1} + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + \boxed{m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1} + \ddot{\theta}_2).
\end{aligned}
$$

$$
M(\Theta) = \begin{bmatrix} \boxed{l_2^2 m_2} + \boxed{2 l_1 l_2 m_2 c_2} + \boxed{l_1^2 (m_1 + m_2)} & \boxed{l_2^2 m_2} + \boxed{l_1 l_2 m_2 c_2} \\ \boxed{l_2^2 m_2} + \boxed{l_1 l_2 m_2 c_2} & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}
$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$

$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2(\qquad + \ddot{\theta}_2).$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2 l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2).$$

$$V(\Theta, \dot\Theta) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2 - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2$$
$$-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2).$$

$$V(\Theta, \dot\Theta) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2 - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = \boxed{m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)} + \boxed{m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)} + \boxed{(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1} \boxed{- m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2}$$
$$\boxed{-2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = \boxed{m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1} + \boxed{m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2} + m_2 l_2 g c_{12} + \boxed{m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)}.$$

$$V(\Theta, \dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} \boxed{-m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2} - \boxed{2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2} \\ \boxed{m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2} \end{bmatrix}$$

Força Centrífuga

Força de Coriolis

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$- 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: 2R (pg 180)

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$
$$- 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

Exemplo 5: Conclusão

$$\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2) + m_2 l_1 l_2 c_2(2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2$$
$$- 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1,$$
$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2(\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2).$$

se torna

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2 l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2(m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\Theta, \dot\Theta) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2 - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

Conclusão

- Cinemática:
  – Direta: Fácil.
  – Inversa: Analiticamente ou Geometricamente, de ambas maneiras difícil…
- Estática:
  – Fácil.
- Dinâmica:
  – Leis de movimento para uso do controle
  – Também um pouco complicado...

Intervalo