Irreversibilidade no transporte quântico ao longo de uma cadeia unidimensional de sistemas de dois níveis

Vinícius Rocha da Silva[1], Roberto Baginski Batista Santos[2]
[1,2]Centro Universitário da FEI
silva.viniciusr@gmail.com, rsantos@fei.edu.br

Resumo: O objetivo deste trabalho é investigar as propriedades do transporte quântico em uma cadeia de dois sistemas de dois níveis no contexto de uma variante não hermitiana da mecânica quântica. Mostramos que, neste contexto, o transporte pode ser irreversível, o que não é possível na mecânica quântica convencional.

1. Introdução

Um sistema de dois níveis é um dos sistemas quânticos mais simples que existe, admitindo apenas dois estados físicos distintos que podem ser representados, por exemplo, por $|1\rangle$ se o sistema estiver excitado, ocupado ou ligado e por $|0\rangle$ se o sistema estiver em seu estado fundamental, desocupado ou desligado[1]. O sistema de dois níveis típico é o spin do elétron. Uma cadeia unidimensional de sistemas de dois níveis é um conjunto de sítios, cada qual ocupado por um sistema de dois níveis. Em uma cadeia destas, cada sistema interage apenas com seus vizinhos mais próximos pela troca de excitações. Cadeias de sistemas de dois níveis podem vir a ser usadas como fios para o transporte de informação quântica[2]. Neste trabalho investigaremos o transporte de excitações em uma cadeia de sistemas de dois níveis com apenas dois sítios, o caso mais simples possível, na variante $\mathcal{PT}$-simétrica da mecânica quântica[3].

2. Metodologia

O hamiltoniano que descreve uma cadeia de dois sistemas de dois níveis é

$$H = H_0 + V \tag{1}$$

em que $H_0 = \hbar\omega_0(N_1 + N_2)$ é o operador responsável por mensurar as excitações nos sítios e o operador $V = -\hbar(g_{12}\,\sigma_1^-\,\sigma_2^+ + g_{21}\,\sigma_1^+\,\sigma_2^-)$ é responsável pela dinâmica do transporte da excitação entre eles. O operador H não é hermitiano. De fato, o operador V é não-hermitiano, mas é $\mathcal{PT}$-simétrico, isto é, simétrico sob a operação de inversão espaço-temporal sempre que as constantes de acoplamento g_{12} e g_{21} forem reais, mesmo que sejam distintas entre si. Os estados relevantes do sistema para o transporte quântico de excitações são representados pelos *kets* $|1\rangle = |10\rangle$ e $|2\rangle = |01\rangle$. Com base nesses estados, encontramos a representação matricial para H e também as autoenergias e autoestados de energia do sistema. Determinamos sua evolução temporal resolvendo a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{2}$$

em termos dos autoestados de H para duas condições iniciais diferentes: (A) excitação inicialmente no sítio 1 ($|\psi(0)\rangle_A = |10\rangle$); (B) excitação inicialmente no sítio 2 ($|\psi(0)\rangle_B = |01\rangle$). Finalmente, calculamos as probabilidades de transição da excitação de um sítio ao outro e a probabilidade de que a excitação retorne ao sítio inicial.

3. Resultados

Diagonalizando o operador H, determinamos as autoenergias $E_\pm = \hbar\left(\omega_0 \pm \sqrt{g_{12}g_{21}}\right)$, que são reais mesmo que H não seja hermitiano, uma característica comum de hamiltonianos $\mathcal{PT}$-simétricos[1,2] e os autoestados associados a estas autoenergias,

$$|E_+\rangle = (1 + g_{21}/g_{12})^{-\frac{1}{2}}\left((g_{21}/g_{12})^{\frac{1}{2}}|1\rangle - |2\rangle\right) \tag{3}$$

$$|E_-\rangle = (1 + g_{21}/g_{12})^{-\frac{1}{2}}\left((g_{21}/g_{12})^{\frac{1}{2}}|1\rangle + |2\rangle\right). \tag{4}$$

Os estados obtidos foram, para a condição inicial A,

$$|\psi(t)\rangle_A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_{12}+g_{21}}{g_{21}}}\left(e^{-iE_+t/\hbar}|E_+\rangle + e^{-iE_-t/\hbar}|E_-\rangle\right) \tag{5}$$

e, para a condição inicial B,

$$|\psi(t)\rangle_B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_{12}+g_{21}}{g_{12}}}\left(e^{-iE_-t/\hbar}|E_-\rangle - e^{-iE_+t/\hbar}|E_+\rangle\right). \tag{6}$$

Finalmente, as probabilidades de transporte da excitação para o sítio adjacente são dadas por

$$P_{1\to2} = |\langle 01|\psi(t)\rangle_A|^2 = \frac{g_{12}}{g_{21}}\,\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{g_{12}g_{21}}\,t\right), \tag{7}$$

$$P_{2\to1} = |\langle 10|\psi(t)\rangle_B|^2 = \frac{g_{21}}{g_{12}}\,\mathrm{sen}^2\left(\sqrt{g_{12}g_{21}}\,t\right). \tag{8}$$

enquanto a probabilidade de que a excitação seja encontrada no sítio 1, por exemplo, tendo estado inicialmente neste mesmo sítio, é

$$P_{1\to1} = |\langle 10|\psi(t)\rangle_A|^2 = \cos^2\left(\sqrt{g_{12}g_{21}}\,t\right). \tag{9}$$

Deve-se notar que

$$P_{1\to2} + P_{1\to1} \neq 1 \tag{10}$$

4. Conclusões

Ao permitir um hamiltoniano não hermitiano, conseguimos descrever um sistema no qual as probabilidades de transporte de excitações não são simétricas. Este resultado permite concluir que, ao longo do tempo, o transporte de excitações entre os sítios será privilegiado em uma dada direção em detrimento de outra e apresentará, portanto, características de irreversibilidade. Este resultado não é possível na formulação hermitiana da mecânica quântica a menos que a cadeia seja um sistema aberto. Como a probabilidade não é conservada no modelo apresentado, sugerimos que um hamiltoniano não hermitiano descreve, implicitamente, um sistema aberto.

5. Referências

[1] DIRAC, P.A.M. **The Principles of Quantum Mechanics**. 4.ed. New York: Oxford University Press, 1996.
[2] BOSE, S. **Contemporary Physics** v.48, p.13, 2007.
[3] BENDER C. M. **Reports on the Progress of Physics** v.70, p.947, 2007.

Agradecimentos

Ao Centro Universitário da FEI pela concessão da bolsa de iniciação científica ao aluno Vinícius Rocha da Silva.

[1] Aluno de IC do Centro Universitário da FEI.