

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE SOLUÇÕES EM OTIMIZAÇÃO ATRAVÉS DE ALGORITMOS GENÉTICOS E ELIPSÓIDES MÍNIMOS

ROGÉRIO ALMEIDA MENEGUIM

*Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Vale do Rio Doce - UNIVALE
Rua Moreira Sales, 850 – Campus I – Governador Valadares – MG – Brasil
E-mail: meneguim@univale.br*

Resumo: Algoritmos estocásticos de otimização (tais como os Algoritmos Genéticos e Algoritmos “Simulated Annealing”) vêm se tornando a abordagem-padrão para a determinação de pontos extremos globais de funcionais contínuos não-lineares multimodais. Esses algoritmos realizam a avaliação desses funcionais em um grande número de pontos, com distribuição espacial aproximadamente aleatória na região próxima ao ponto extremo, sendo que tal conjunto de avaliações é geralmente descartado após a obtenção do “ponto de ótimo”. O presente trabalho apresenta uma metodologia para a utilização do conjunto de avaliações do funcional objetivo que foi gerado por um algoritmo genético, com o intuito de obter informações adicionais, relacionadas com a sensibilidade do funcional objetivo na região próxima à solução. Como resultado da análise, são obtidas expressões analíticas de elipsóides que aproximam as curvas de nível do funcional objetivo nessa região.

Palavras Chave: otimização, análise de sensibilidade, algoritmos estocásticos.

Abstract: Stochastic optimization algorithms (such that Genetic Algorithms, Simulated Annealing Algorithms) are becoming the standart approach for problems of determination of the global extreme points of continuous non-linear multimodal functionals. These algorithms perform a large number of functional evaluations with approximately random spatial distribution in the region nearby the extreme point. This set of functional evaluation is usually discarded after the determination of the “optimum point”. This paper presents a methodology for the employment of the set of functional evaluations that is generated by the stochastic optimization algorithms, in order to obtain additional information, related to the objective functional sensitivity in the region nearby the solution point. The proposed analysis method furnishes analytical expressions for ellipsoids that approach the contour surfaces of objective functional in this region.

Key Words: optimization, sensitivity analysis, stochastic algorithms.

1 Introdução

A maior parte dos algoritmos de otimização atualmente disponíveis tem como objetivo apenas fazer a determinação do ponto de mínimo de uma função. Um outro elemento que pode ser importante investigar em problemas de otimização, no entanto, é a “sensibilidade” da solução, ou seja, a degradação que ocorre no valor da função objetivo, associada a perturbações nos parâmetros de projeto. A questão da análise da “sensibilidade” das soluções pode seguir essencialmente duas abordagens: (i) análise pontual: é feita a análise da curvatura da função no ponto de mínimo; e (ii) análise por perturbação finita: é feita a análise do valor do máximo da função em uma região finita ao redor do ponto de mínimo. A primeira abordagem tem empregado, em geral, a interpretação dos multiplicadores de Lagrange no ponto ótimo enquanto custos marginais para determinação da “sensibilidade” (Luenberger, 1984). A segunda abordagem acima se expressa predominantemente em abordagens envolvendo o cálculo exaustivo da função objetivo na região de incertezas paramétricas.

O presente trabalho envolve a análise da sensibilidade nesse segundo contexto. Supõe-se que, devido à estrutura do algoritmo de otimização empregado para fazer a determinação do ponto de ótimo da função objetivo, já foi necessária a realização de avaliações “exaustivas” da função objetivo na região próxima ao ponto de mínimo. Esse é o caso da otimização baseada em algoritmos estocásticos, que vêm se tornando a abordagem-padrão para a otimização de funções contínuas não-lineares multimodais. As referências (Back et al., 1997) e (Bilbro, 1994) apresentam apanhados gerais de duas das principais abordagens

situadas no campo dos algoritmos estocásticos: os *Algoritmos Genéticos e os algoritmos de Simulated Annealing*. Além dessas, existe uma diversidade de outros métodos classificáveis dentro dessa categoria, como por exemplo as apresentadas em (Dorigo et al., 1996) e (Ackley et al., 1985). No contexto dessa família de algoritmos, recentemente foi proposto um método de busca de soluções “pouco sensíveis” (Tsutsui e Ghosh, 1997) que não procura entretanto, de maneira explícita, quantificar a sensibilidade das soluções encontradas.

A análise de sensibilidade aqui proposta é um subproduto que pode ser obtido, com pouco esforço computacional, após a realização de uma otimização de funcional através de um algoritmo estocástico. Dessa forma é aproveitado o conjunto de avaliações do funcional que, de outra forma, seria descartado após a determinação do ponto de mínimo. Como o requisito para a realização da análise aqui proposta, é necessário que o algoritmo estocástico tenha gerado uma amostragem da função objetivo na região próxima do ótimo que possua a propriedade de distribuição aproximadamente aleatória nessa região. Na dissertação (Meneguim, 1999) é mostrado que nem todo algoritmo estocástico atende a tal requisito; alguns algoritmos fazem a avaliação da função objetivo segundo “direções preferenciais” do espaço de parâmetros. Essa questão também é discutida em (Salomon, 1998).

A sensibilidade do funcional objetivo $f(\cdot)$ ao redor do ponto de mínimo local \mathbf{x}^* pode ser adequadamente descrita através de suas “curvas e nível” (ou “superfícies de nível” em n dimensões), pois o conhecimento dessas curvas determina os conjuntos de

soluções que asseguram determinado desempenho (ou seja, que asseguram que a função objetivo tenha valor menor ou igual a determinada constante). A proposta deste trabalho é fazer uma aproximação local da função objetivo por uma função quadrática convexa, o que conduzirá a aproximações para as curvas de nível com a estrutura de elipsóides de dimensão n .

2 Formulação do Problema de Análise de Sensibilidade

Seja o funcional $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, e seja o ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ seu mínimo:

$$x^* = \arg \min_x f(x) \quad (1)$$

Se $f(x)$ é continuamente diferenciável em x^* , e se x^* é um ponto de mínimo estrito, sabe-se que a seguinte aproximação é válida para alguma vizinhança de x^* :

$$f(x) = \alpha + \nu'x + x'\Omega x + \mathcal{O}(3) \quad (2)$$

Sendo $\Omega = \Omega' > 0$, ou seja, nessa vizinhança $f(x)$ é aproximada por uma função quadrática estritamente convexa. Isto significa que, pelo menos nessa região, as curvas de nível da função serão aproximadamente descritas por elipsóides:

$$f(x) = \beta \Leftrightarrow (x - x^*)'P(x - x^*) = \eta(\beta) \quad (3)$$

A metodologia aqui proposta se baseia na idéia de determinar o “menor elipsóide” (em determinado sentido) que contém todos os pontos cujo valor de função objetivo é menor que certo limite de desempenho mínimo, e que não contém nenhum ponto cujo valor de função objetivo é maior que outro limite de desempenho tido como “intolerável”, dado um conjunto de avaliações da função objetivo em uma região do espaço de parâmetros.

Considerando o elipsóide descrito em (3), tem-se que os semi-eixos desse elipsóide estão orientados segundo as direções dadas pelos autovetores v_i da matriz P , e que os comprimentos desses semi-eixos são proporcionais ao inverso das raízes quadradas dos autovalores correspondentes a cada autovetor:

$$e_i = \sqrt{\frac{\eta(\beta)}{\lambda_i}} \quad (4)$$

Sendo λ_i o autovalor associado ao autovetor v_i , da matriz P :

$$Pv_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

É possível formular o problema de determinação de um elipsóide mínimo como equivalente a um problema de

determinação de um elipsóide com os “menores semi-eixos” que for possível. Uma função objetivo que corresponde de maneira aproximada a esse problema é dada por:

$$J(P) = \sum_{i=1}^n \frac{\eta(\beta)}{e_i^2(P)} \quad (6)$$

A maximização do funcional $J(P)$ na variável P está correlacionada com a minimização dos valores e_i dos semi-eixos do elipsóide. É fácil verificar que:

$$J(P) = \text{tr}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (7)$$

Este é o fundamento para a formulação do problema de determinação do elipsóide mínimo em termos de um problema de otimização linear com restrições do tipo LMI's (Linear Matrix Inequalities).

Sejam considerados os conjuntos de pontos $\mathcal{X}_i \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{X}_o \subset \mathbb{R}^n$, e seja um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Deseja-se encontrar o “elipsóide mínimo” com centro em x^* que contém todos os pontos pertencentes a \mathcal{X}_i e que não contém nenhum ponto pertencente a \mathcal{X}_o . Esse problema é formulado como:

$$\max_P \text{tr}(P)$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} (x - x^*)'P(x - x^*) < 1 & \forall x \in \mathcal{X}_i \\ (x - x^*)'P(x - x^*) > 1 & \forall x \in \mathcal{X}_o \\ P > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Esse é um problema de otimização linear na variável P , com restrições do tipo LMI's. Problemas formulados dessa forma são convexos e podem ser resolvidos de maneira eficiente através de métodos de pontos interiores, com a garantia de convergência da solução para o ótimo global. Para maiores detalhes sobre LMI's e métodos de pontos interiores ver (Boyd et al., 1994). Este é o método básico que será aqui aplicado para a determinação de “elipsóides de sensibilidade”.

NOTA 1 Deve-se observar que a normalização da constante $\eta(\beta)$ para o valor 1 é feita sem perda de generalidade.

2.1 Interpretação do Elipsóide Mínimo

Espera-se que na região próxima ao ponto de mínimo local x^* , o elipsóide mínimo corresponda aproximadamente a uma curva de nível da função objetivo que, nessa região, é aproximadamente quadrática. Essa suposição é testada com a função quadrática:

$$f(x) = x'Qx \quad (9)$$

Sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Para realizar o teste da hipótese acima, são gerados 100 pontos aleatoriamente dentro de um quadrado, sendo todos os pontos avaliados pela função quadrática. Os 50 pontos de menor valor da função objetivo são deixados no interior do elipsóide mínimo, e os 50 pontos de maior valor são deixados no seu exterior. O elipsóide mínimo é comparado na figura 1 às curvas de nível da função.

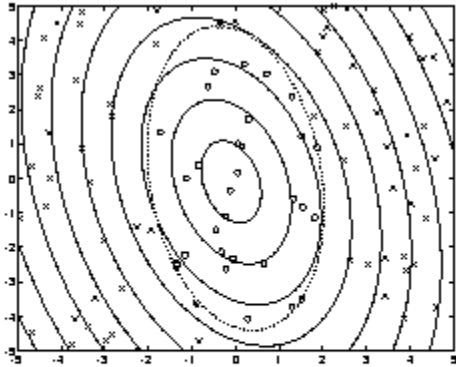


Figura 1. Comparação do elipsóide mínimo (tracejado) com as curvas de nível (linha cheia) de uma função quadrática. O elipsóide mínimo contém todos os pontos (o) e não contém nenhum ponto (x).

Os semi-eixos das elipses correspondentes às curvas de nível da função estão orientados segundo as direções dadas pelos autovetores da matriz Q :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.9732 \\ -0.2298 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.2298 \\ -0.9732 \end{bmatrix} \quad (10)$$

A estimativa desses semi-eixos fornecida pelos autovetores da matriz P é dada por:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.9939 \\ -0.1101 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.1101 \\ -0.9939 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Os comprimentos relativos dos semi-eixos podem ser obtidos normalizando o menor semi-eixo em 1. Dessa forma, o semi-eixo maior, no caso das curvas de nível, é 1,88 vezes maior que o semi-eixo menor. A estimativa desse valor, obtida pelos autovalores da matriz P , é de um semi-eixo maior 2,24 vezes maior que o semi-eixo menor.

Pelos resultados obtidos, pode-se concluir que pelo menos neste caso a aproximação de uma curva de nível da função pelo elipsóide mínimo foi adequada. É possível, em dimensões maiores, utilizar a informação de autovalores e de autovetores da matriz P (correspondente à geratriz do elipsóide mínimo) para determinação de direções e distâncias relevantes para a análise de sensibilidade. Para verificar a hipótese de que a aproximação seja razoável também em espaços

de dimensões maiores, foi gerado um conjunto de 120 pontos num espaço de 4 dimensões, sendo a função quadrática definida pela matriz:

$$Q = \begin{bmatrix} 2.3661 & 0.0409 & -0.2517 & -0.7242 \\ 0.0409 & 4.0621 & 1.0608 & 0.5386 \\ -0.2517 & 1.0608 & 2.7300 & 1.0114 \\ -0.7242 & 0.5386 & 1.0114 & 1.8417 \end{bmatrix}$$

Foram escolhidos os 70 pontos de menor valor da função quadrática para o interior do elipsóide mínimo, e os 40 pontos de maior valor para o exterior do mesmo. Os demais 10 pontos (correspondentes a uma faixa intermediária) foram desprezados. Foi obtido um elipsóide mínimo cujos autovalores, normalizados para que o menor seja igual a 1, são:

$$\sigma P = \{ 1.0000 \ 2.4144 \ 3.5648 \ 7.5764 \}$$

Os autovalores da matriz Q , por sua vez, são:

$$\sigma Q = \{ 1.0000 \ 2.0000 \ 3.0000 \ 5.0000 \}$$

Os autovetores da matriz P são dados pelas colunas da matriz:

$$\begin{bmatrix} 0.3615 & 0.7079 & -0.2509 & -0.5525 \\ -0.0035 & 0.5513 & 0.7513 & 0.3629 \\ -0.3965 & -0.1987 & 0.5025 & -0.7422 \\ 0.8439 & -0.3943 & 0.3467 & -0.1106 \end{bmatrix}$$

Estes devem ser comparados com os autovetores da matriz Q :

$$\begin{bmatrix} 0.3594 & 0.6677 & -0.1285 & -0.6391 \\ -0.0011 & 0.5084 & 0.7754 & 0.3746 \\ -0.4309 & -0.3068 & 0.5233 & -0.6681 \\ 0.8277 & -0.4490 & 0.3293 & -0.0697 \end{bmatrix}$$

Pode-se notar que houve razoável correspondência entre os autovetores exatos (matriz Q) e aproximados (matriz P), assim como entre os autovalores exatos e aproximados. Aparentemente então, o método de aproximação das curvas de nível é adequado para problemas de dimensão maior que 2.

NOTA 2 O algoritmo anterior de determinação do "elipsóide mínimo" pode apresentar problemas numéricos quando não houver limitação para o crescimento do elipsóide em determinada direção do espaço de parâmetros. Isto é devido ao fato de que a minimização dos semi-eixos não é exatamente descrita pela maximização do funcional objetivo (6). Para lidar com tal problema, pode ser introduzida uma modificação no algoritmo básico, sendo adicionada a restrição de que o maior semi-eixo do elipsóide mínimo deva ser menor ou igual a um determinado valor r prefixado. Isso corresponde à adição da restrição:

$$P > \frac{1}{r^2} I \quad (12)$$

Utilizando o algoritmo (8) acrescido desta restrição em uma seqüência de etapas, é possível determinar de maneira em princípio exata qual é o menor valor possível para o maior semi-eixo do elipsóide, utilizando por exemplo um algoritmo de bissecção.

3 Organização do Conjunto de Dados

A análise de sensibilidade de soluções é construída a partir da separação dos pontos cujas avaliações são disponíveis nos conjuntos \mathcal{X}_i e \mathcal{X}_o . Para a criação desses conjuntos, os pontos resultantes do algoritmo genético são inicialmente submetidos a uma ordenação segundo os valores da função objetivo. Considerando que haja p pontos avaliados, separam-se os p_i pontos com menor valor da função objetivo para pertencerem ao conjunto \mathcal{X}_i que ficará no interior do elipsóide. Os p_o pontos com maior valor da função objetivo formarão o conjunto \mathcal{X}_o exterior ao elipsóide. Eventualmente, pode ser conveniente fazer $p > p_i + p_o$, de forma a deixar uma “folga” entre o conjunto de pontos interiores e o conjunto de pontos exteriores. Isso pode ser necessário para tornar factível o problema de determinação do elipsóide. É válida portanto a relação:

$$\mathcal{X} \supset (\mathcal{X}_i \cup \mathcal{X}_o) \quad (13)$$

Seja $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Considere-se o funcional $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Define-se o conjunto $\mathcal{J}(f_o)$ como o conjunto dos pontos do espaço cuja avaliação em $f(\cdot)$ não ultrapassa f_o :

$$\mathcal{J}(f_o) = \{x \mid f(x) < f_o\} \quad (14)$$

Considerando agora um ponto de mínimo local x_o , define-se o conjunto $\mathcal{Q}(f_o, x_o)$ como o maior subconjunto convexo de $\mathcal{J}(f_o)$ que contém x_o :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f_o, x_o) &= \{x \mid x \in \mathcal{J}(f_o)\}; \\ \bar{x} &= \alpha x + (1 - \alpha)x_o \in \mathcal{J}(f_o) \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \quad (15)$$

O objetivo será o de determinar um elipsóide cuja região interior aproxima uma região $\mathcal{Q}(\cdot, \cdot)$. Definindo-se a região $\mathcal{E}(P, x_o)$ interior ao elipsóide definido pela matriz $P = P^T > 0$ e pelo centro x_o como:

$$\mathcal{E}(P, x_o) : \{x \mid (x - x_o)^T P (x - x_o) < 1\} \quad (16)$$

Define-se o problema de análise de sensibilidade como a determinação da matriz P tal que:

$$\mathcal{E}(P, x_o) \approx \mathcal{Q}(f_o, x_o) \quad (17)$$

Para estabelecer um caráter de custo garantido para o interior do elipsóide, a idéia é fazer:

$$\mathcal{E}(P, x_o) \subset \mathcal{Q}(f_o, x_o) \quad (18)$$

Seja que, para garantir uma aproximação com o mínimo de conservatividade, é preciso escolher o conjunto aproximante máximo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(P, f_o, x_o) &: \{\mathcal{E}(\bar{P}, x_o) \mid \mathcal{E}(P, x_o) \subset \mathcal{E}(\bar{P}, x_o) \\ &\forall (\mathcal{E}(P, x_o) \subset \mathcal{Q}(f_o, x_o))\} \end{aligned} \quad (19)$$

Esse problema é aproximadamente resolvido determinando P tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i &\subset \mathcal{E}(P, x_o) \\ \mathcal{X}_o \cap \mathcal{E}(P, x_o) &= \emptyset \end{aligned} \quad (20)$$

Se os conjuntos de amostras \mathcal{X}_i e \mathcal{X}_o forem adequados, espera-se que o conjunto $\mathcal{E}(P, x_o)$ determinado a partir dos mesmos aproxime o conjunto $\mathcal{E}^*(P, f_o, x_o)$.

4 Método de Análise de Sensibilidade

Nesta seção são sugeridos três métodos que se distinguem um do outro pela especificação da região de interesse:

Primeiro método: a região de interesse não é definida pelo usuário, sendo escolhida em função dos dados disponíveis (por exemplo, no caso de Algoritmos Genéticos, poderia ser empregada apenas a população final).

Segundo método: é definida uma tolerância de variação para cada parâmetro, sendo que a região de interesse deve necessariamente conter tal faixa de variações.

Terceiro método: é definida uma tolerância de degradação do valor ótimo da função objetivo, sendo que a região de interesse deve conter necessariamente os pontos que satisfazem tal tolerância.

Os três métodos acima se diferenciam pela forma como é escolhido o conjunto $\mathcal{Q}(f_o, x_o)$ que se deseja aproximar. Tal escolha é feita pela determinação dos conjuntos \mathcal{X}_i e \mathcal{X}_o . Uma vez realizada tal escolha o problema se reduz à determinação do elipsóide mínimo, utilizando o algoritmo anteriormente apresentado. Por razões de espaço, a seguir é especificado o procedimento associado apenas ao terceiro método (os outros dois podem ser facilmente inferidos por similaridade).

4.1 Terceira Abordagem de Sensibilidade

O terceiro método de análise de sensibilidade acima esboçado parte do princípio de que deseja-se determinar o subconjunto do espaço de soluções em que a função objetivo $f(\cdot)$ apresenta valores menores

que um limiar f_o , pré-estabelecido. A interpretação física desse tipo de abordagem corresponde à situação em que é conhecido um desempenho mínimo tolerável do sistema que está sendo otimizado, sendo que se deseja um conjunto de soluções que satisfazem tal desempenho mínimo. O ponto solução é o centro de tal conjunto, que tem o papel de fornecer a informação sobre a tolerância de variação espacial dos parâmetros para que não haja violação do desempenho mínimo admissível.

São inicialmente armazenados todos os indivíduos gerados durante a execução do algoritmo genético. A seguir são escolhidos alguns indivíduos para compor o problema de determinação do elipsóide e descartados os demais para evitar o aumento da complexidade computacional do algoritmo de determinação do elipsóide mínimo.

A formação dos conjuntos \mathcal{X}_i e \mathcal{X}_o é feita segundo o algoritmo:

Passo 1: Ordenar o conjunto de pontos agora disponível, \mathcal{X} , segundo o funcional $f(\cdot)$.

Passo 2: Determinar:

$$\mathcal{X}_i = \{x \in \mathcal{X} \mid f_o - \beta < f(x) \leq f_o\}$$

$$\mathcal{X}_o = \{x \in \mathcal{X} \mid f_o + \gamma \leq f(x) < f_o + \gamma + \beta\}$$

Para um dado valor de γ escolhido de forma a garantir a “folga” necessária para viabilizar a factibilidade do problema de determinação do elipsóide mínimo, sendo β ajustado para garantir a existência de um número suficiente de elementos tanto em \mathcal{X}_i quanto em \mathcal{X}_o .

5 Exemplo

Como instância de aplicação da metodologia aqui proposta, será mostrado um problema da determinação de controlador ótimo H2 com realimentação completa de estados, obtidos através da aplicação de um algoritmo genético com codificação real de parâmetros. Embora este não seja um problema realístico, sendo aqui empregado apenas para exemplificar a metodologia desenvolvida em um contexto específico, pode-se conjecturar que a abordagem empregada possa vir a ser uma resposta para o problema da “fragilidade de controladores” que foi recentemente apontado como uma questão de grande relevância dentro do projeto dos controladores robustos (Keel e Bhattacharyya, 1997).

Seja o sistema dinâmico por:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew \quad (21)$$

$$z = Cx + Du$$

Neste sistema, x é o vetor de estados, w o vetor de entradas de perturbação, e z o vetor de saídas

controladas. O vetor de entradas de controle u é dado por:

$$u = Kx \quad (22)$$

A matriz de transferência desse sistema, em malha fechada, é dada por:

$$H(s) = (C + DK)[sI - (A + BK)]^{-1}E \quad (23)$$

A norma H2 desse sistema é definida como:

$$\|H(s)\|_2^2 = \sup_{\zeta > 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(H^*(\zeta + j\omega)H(\zeta + j\omega)) d\omega \right) \quad (24)$$

Essa norma é uma medida do efeito causado por sinais de perturbação w no vetor de saídas z . O objetivo do controlador, portanto, será o de minimizar tal forma, minimizando em certo sentido o efeito das perturbações na saída controlada. Para uma discussão mais detalhada do significado do problema de minimização dessa norma, ver referência (Zhou et al., 1996). Para efeito de teste dos algoritmos de análise de sensibilidade foi gerado aleatoriamente um sistema dinâmico com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -0.3868 & 0.0751 \\ 0 & -0.0352 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.6965 \\ 1.6961 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.5297 & 0 \\ 0.6711 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0668 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0.0591 & 0 \\ 0 & 1.7971 \end{bmatrix}$$

Em (Meneguim, 1999) é mostrado que o Algoritmo Genético com codificação real desenvolvido em (de Paiva, 1997) é capaz de gerar populações aleatoriamente distribuídas na região de atração do ponto ótimo. Tal algoritmo, com algumas alterações descritas em (Meneguim, 1999), foi aqui empregado para a resolução do problema de determinação do controlador ótimo H2, com número de iterações fixado em 150 e população de 40 indivíduos. Foi obtido o seguinte controlador ótimo H2:

$$K_{2g} = [5.4813 \quad -2.8443]$$

Sendo obtida uma norma ótima igual a:

$$\|H\|_2 = 0.6541$$

Os valores do controlador ótimo e da norma ótima coincidem com o ótimo analiticamente determinado do problema (o que é feito através da solução de equações de Riccati). Para aplicação do algoritmo de análise de

sensibilidade foi aplicada a terceira abordagem: determinou-se uma faixa aceitável de degradação do critério de desempenho. O conjunto \mathcal{X}_i dos pontos interiores ao elipsóide foi definido como o conjunto dos pontos cuja norma H2 pertence à faixa:

$$0,65418 < \|H\|_2 \leq 0,6542$$

O conjunto \mathcal{X}_o dos pontos exteriores ao elipsóide foi definido como o conjunto dos pontos cuja norma H2 pertence à faixa:

$$0,6544 < \|H\|_2 \leq 0,6546$$

A figura 2 mostra o elipsóide calculado a partir dos conjuntos \mathcal{X}_i e \mathcal{X}_o . Os controladores contidos no interior do elipsóide são, em primeira instância, capazes de manter o índice de desempenho do sistema em malha fechada num valor menor ou igual a 0,6544. Isso estabelece limites que podem ser interpretados, por exemplo, como tolerâncias admissíveis para a implementação física do controlador ótimo.

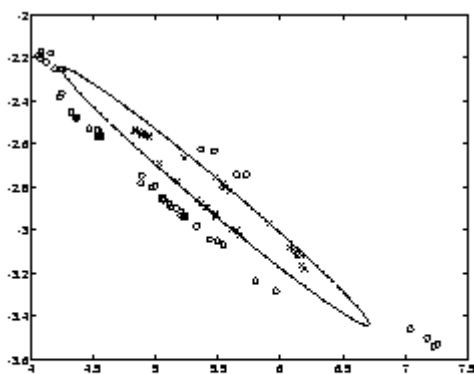


Figura 2. Elipsóide resultante da análise de sensibilidade da solução H_2 utilizando a terceira abordagem. São mostrados os pontos pertencentes ao conjunto \mathcal{X}_i (x) e ao conjunto \mathcal{X}_o (o).

6 Conclusão

Foi mostrado neste trabalho que a massa de dados gerada por algoritmos estocásticos de otimização pode ser pós-processada, com custos computacional reduzido para determinação das propriedades de sensibilidade associadas ao ponto de ótimo encontrado pelo algoritmo. As novas informações geradas, descrevendo a geometria da função objetivo em uma região finita ao redor do ponto de ótimo, podem ser bastante relevantes para a implementação física da solução encontrada. Este é o caso por exemplo de projetos de dispositivos, em que são determinados, ao final do processo de projeto, não apenas os valores ótimos dos parâmetros, mas também suas tolerâncias de fabricação.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelo CNPq, CAPES e FAPEMIG.

Referências Bibliográficas

- Ackley, D. H., Hinton, G. E. e Sejnowski, T. J. (1985). A learning algorithm for Boltzman Machines, *Cognitive Science* 9: 147-169.
- Back, T., Hammel, U. e Schwefel, H. P. (1997). Evolutionary computation: comments on the history and current state, *IEEE Trans. Evolutionary Computation* 1(1): 3-17.
- Bilbro, G. L. (1994). Fast stochastic global optimization, *IEEE Trans. Sys. Man Cybern.* 24(4): 684-687.
- Boyd, S., El-Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM.
- de Paiva, E. C. (1997). *Otimização Restrita de Controladores Robustos Utilizando Algoritmos Genéticos*, Tese de Doutorado, Fac. Eng. Elétrica da UNICAMP.
- Dorigo, M., Maniezzo, V. e Coloni, A. (1996). Ant system: optimization by a colony of cooperating agents, *IEEE Trans. Sys. Man Cyb. – Part B* 26(1): 29-41.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1997). Robust, fragile, or optimal?, *IEEE Trans. Aut. Contr.* 42(8): 1098-1105.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley.
- Meneguim, R. A. (1999). *Análise de Sensibilidade de Soluções em Otimização Através de Elipsóides Mínimos*, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Eng. Elétrica da UFMG.
- Meneguim, R. A. (2000). *Análise de Sensibilidade em Otimização por Algoritmos Estocásticos*, XIII Congresso Brasileiro de Automática, setembro de 2000, pp 1150-1155, UFSC, Florianópolis, SC.
- Salomon, R. (1998). Evolutionary algorithms and gradient search: similarities and differences, *IEEE Trans. Evolutionary Computation* 2(2): 45-55.
- Tsutsui, S. e Ghosh, A. (1997). Genetic algorithms with a robust solution searching scheme, *IEEE Trans. Evolutionary Computation* 1(3): 201-208.
- Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall.