

DEFINIÇÃO DE RESTRIÇÕES E AVALIAÇÃO DE FUNÇÕES APROXIMADAS POR PARTES PARA SISTEMAS EMBARCADOS

SEBASTIAN Y. C. CATUNDA E OSVALDO R. S. MENDEZ

*Departamento de Engenharia de Eletricidade, Universidade Federal do Maranhão
Av. dos Portugueses s/n, Bacanga, São Luis – MA, 65080-040, Brasil
E-mails: catunda@dee.ufma.br, osvaldo@dee.ufma.br*

Resumo— Neste trabalho, apresenta-se um procedimento para definir as restrições e limites de aproximação de uma função não linear por funções polinomiais por partes. Considera-se que a variável independente é gerada com uma incerteza associada. Também, considera-se que os cálculos da função aproximada são realizados em virgula fixa e com resolução limitada, que é mais adequado para implementação em sistemas embarcados com baixo poder computacional. Propõe-se um critério de avaliação de uma solução de função aproximada, que pode ser utilizado para comparação de diversas soluções fornecidas por diferentes procedimentos. Um exemplo de aproximação de uma função não linear é apresentado para ilustrar os procedimentos propostos.

Abstract— A procedure for defining the constraints and limits for approximating a non-linear function by piecewise polynomial functions is presented. We consider the free variable to be generated with an associated uncertainty. Also, the calculation is carried out using fixed-point arithmetic with limited resolution, which is more suitable for implementing in embedded systems with low computational power. A benchmark for evaluating an approximated function solution, which can be used for comparing several solutions yielded by different procedures, is also proposed. An example a non-linear function approximation is presented in order to illustrate the proposed procedures.

Keywords— Piecewise polynomial approximation, Nonlinear functions, Embedded systems, Table look-up, Signal generators, Micro controllers.

Nomenclatura

Nas definições apresentadas a seguir, o sobrescrito “~” representa aproximações e o sobrescrito “ \circ ” representa valores máximos determinados de projeto.

1 Introdução

Diversas aplicações de eletrônica necessitam sistemas que gerem sinais ou valores utilizando funções não lineares. Em sistemas digitais de posicionamento, geralmente necessita-se converter a informação de ângulo em posição, utilizando funções trigonométricas (Lygouras, 1999). Em instrumentação, diversas aplicações necessitam gerar funções não lineares para reconstrução dos valores de medição (Flammini et al., 1999), que podem ser utilizadas para compensação de não linearidades do sensor (Catunda et al., 2000) ou para compensação da influência de grandozas que causam interferência (Catunda et al., 1998b, Catunda et al., 2001).

Quando a aplicação permite a utilização de microcomputadores ou microcontroladores com um certo poder computacional, essas funções podem ser implementadas diretamente ou geradas utilizando cálculo em virgula flutuante (“floating-point”). Quando a aplicação não permite, por motivos diversos, tais como redução de custos ou complexidade de projeto, pode-se optar por utilizar um sistema embarcado com cálculo em virgula fixa. Esse sistema pode ser composto, por exemplo, de um microcontrolador de oito bits de baixo custo, de uma FPGA ou de um ASIC (Catunda et al., 1998a). Entretanto, nesta opção,

as funções não lineares não podem ser implementadas diretamente e, geralmente, os cálculos são realizados em virgula fixa (“fixed-point”).

Uma alternativa viável para aplicações em sistemas embarcados é usar funções polinomiais aproximadas por partes (Burden e Faires, 1989). Neste caso, definem-se pontos de quebra da função aproximada que são armazenados em uma tabela de equivalência (“Look-up Table”), juntamente com os coeficientes necessários. Os valores de interesse são gerados utilizando a função definida pelos pontos de quebra imediatamente inferior e superior ao valor de entrada.

Aproximação de funções não lineares por funções polinomiais é um assunto bastante abordado na literatura e diversos autores têm proposto diferentes procedimentos para solução do problema (Chen et al., 1996, Chua e Deng, 1986, Julian et al., 1998, Lygouras, 1999, Manis et al., 1997). Entretanto, nessas diversas abordagens, a variável independente é sempre considerada como exata. Neste trabalho, apresenta-se um procedimento para determinação das restrições e limites para aproximação de funções não lineares em sistemas embarcados que utilizem cálculo em virgula fixa. O procedimento leva em conta a incerteza associada à variável independente e seu efeito na geração da variável dependente. Propõe-se também, um critério de avaliação de soluções de aproximação. Esse critério pode ser utilizado para comparar diversas soluções fornecidas por diferentes procedimentos de aproximação.

2 Definições

Em um sistema, necessita-se gerar valores utilizando uma função não linear definida por $y = f(x)$, $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ e $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$. Deseja-se utilizar um sistema digital embarcado em que a função f não é disponível e em que os cálculos são realizados em vírgula fixa, com número de bits limitado, e com a restrição de que os valores de y sejam gerados com uma exatidão equivalente a uma resolução de N_T bits. Supõe-se que os valores de x e de y são positivos e seus valores mínimos são zero, que pode ser obtido adicionando-se constantes à função f . Essa constante pode ser subtraída após a geração dos valores de y . Desconsiderando-se a forma como os valores são gerados, tem-se que o valor máximo da incerteza associada $\hat{\epsilon}_y$, para todos os valores de y deve ser de:

$$\hat{\epsilon}_y = \frac{y_{\max}}{2^{N_T+1}}. \quad (1)$$

Ainda, no sistema embarcado, pode-se utilizar apenas alguns valores de x e que possuem uma incerteza associada à sua geração. Define-se $\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ como os n possíveis valores de x e $\epsilon_x = \{\epsilon_{x1}, \dots, \epsilon_{xn}\}$ como as incertezas associadas, tal que $\tilde{x} = x + \epsilon_x$.

Uma solução problema é aproximar f por uma função polinomial por partes $s = \tilde{f}(\tilde{x})$, em que s é uma aproximação de y . Entretanto, deve-se garantir que a incerteza de geração de s em relação a y , que depende da propagação da incerteza ϵ_x e do erro de aproximação, esteja dentro da especificação de exatidão do projeto, ou seja:

$$|\epsilon_s| \leq \hat{\epsilon}_y, \quad (2)$$

em que ϵ_s é a incerteza (ou erro) de geração de s , definida como:

$$\epsilon_s = y - s. \quad (3)$$

2.1 Função aproximada

A função aproximada é construída por partes a partir de valores armazenados em uma LUT que contém m pontos de quebra $p_x = \{p_{x1}, \dots, p_{xm}\}$, $p_x \subseteq \tilde{x}$, $m \leq n$, e m conjuntos de coeficientes $c = \{c_1, \dots, c_m\}$, $c_j = \{a_j, b_j, \dots\}$ para $j = 1, \dots, m$, em que o número de coeficientes é igual ao grau da interpolação mais um. Os pontos de quebra e coeficientes são armazenados com uma resolução de N_T bits, que deve ser maior ou igual a N_T . A função aproximada \tilde{f} é composta por m funções \tilde{f}_j definidas nos intervalos $[p_{xj}, p_{xj+1}]$, com $j = 1, \dots, m$, $p_{x1} = x_1$ e $p_{xm+1} = x_n$, e definida como:

$$\tilde{f}_j(\tilde{x}) = a_j + b(\tilde{x} - p_{xj}) + c(\tilde{x} - p_{xj})^2 + \dots, \quad (4)$$

para $p_{xj} \leq \tilde{x} < p_{xj+1}$ e $\tilde{f}_{m+1}(x_n) = \tilde{f}_m(x_n)$.

No caso de interpolação linear, devido à simplicidade de reconstrução da função aproximada, pode-se optar por armazenar os coeficientes a_j e b_j , ou apenas os pontos correspondentes da variável y , p_{yj} . A segunda opção necessita um tempo maior de processamento porque os coeficientes têm que ser calculados em tempo real, e de uma posição a mais para armazenar o ponto de quebra em x_n . Os coeficientes podem ser calculados por:

$$a_j = p_{yj} \text{ e } b_j = \frac{p_{yj+1} - p_{yj}}{p_{xj+1} - p_{xj}}, \quad (5)$$

2.2 Quantização das variáveis

Considera-se o cálculo da variável s e os valores armazenados na tabela em vírgula fixa, com resolução de N_T bits. A variável s (assim como y) é escalonada e o seu valor máximo é representado pela palavra binária "111...", de forma a se obter máxima resolução de representação. Os coeficientes não são escalonados, para evitar o uso de diferentes escalas, e são representados diretamente por um número binário e um expoente, que define a posição da vírgula. Dessa forma, o valor máximo de um coeficiente pode ser diferente do valor máximo representável. Diversos valores de uma mesma variável têm uma mesma representação e possuem um mesmo valor de expoente, que não necessita ser armazenado, mas deve ser levado em conta no cálculo de s .

A quantização em uma resolução N_T bits é realizada dividindo-se a faixa de variação da variável em 2^{N_T} intervalos iguais, e o valor quantizado é definido no meio de cada intervalo. Para os coeficientes, considera-se o valor máximo da faixa de variação como o valor equivalente ao maior número binário que pode representá-lo. Caso os coeficientes armazenados na tabela apresentem valores negativos, deve-se dispor de um bit para a representação do sinal. Como exemplo de quantização, considere um coeficiente que varie de 0 a 0,4 e que se deseja armazená-lo com resolução de dois bits. O valor máximo de variação é considerado como 0,5 e o expoente como -3. Os valores binários e equivalentes reais são apresentados na tabela 1.

Além da quantização, os valores máximo e mínimo que s pode assumir são equivalentes aos valores binários, com resolução N_T , "111..." e "000...", respectivamente. Esses limites devem ser considerados para geração da função aproximada.

Tabela 1. Exemplo de representação de coeficientes na LUT.

C	Binário	Real
$0 \leq c < 0,125$	00	0,0625
$0,125 \leq c < 0,25$	01	0,1875
$0,25 \leq c < 0,375$	10	0,3125
$0,375 \leq c \leq 0,5$	11	0,4375

3 Propagação da incerteza e o erro de aproximação

A incerteza associada à variável independente x , ϵ_x , pode ser originada de diversas formas: devido à quantização em um conversor A/D, arredondamento ou truncamento de cálculo, precisão de um codificador óptico ou de um relógio, entre outras. No caso de um conversor A/D ideal, o valor de $\epsilon_{x\max} = q/2$ e $\epsilon_{x\min} = -q/2$, em que q é o passo de quantização. Para $i = 1, \dots, n$, os valores das incertezas são limitados por: $\epsilon_{xi} \in [\epsilon_{xi\min}, \epsilon_{xi\max}]$, em que normalmente são constantes para todo o conjunto. Essa incerteza é propagada através da função aproximada causando uma incerteza na geração dos valores de s , e deve ser considerada de forma a garantir a exatidão desejada na geração dos valores.

A incerteza associada à variável s é limitada por: $\epsilon_{si} \in [\epsilon_{si\min}, \epsilon_{si\max}]$, para $i = 1, \dots, n$ e pode ser dividida em duas componentes: $\epsilon_{si} = \epsilon_{pi} + \epsilon_{Ai}$. ϵ_p se deve à propagação da incerteza ϵ_x através da função aproximada, e ϵ_A é o erro de aproximação de $f(\cdot)$ por $\tilde{f}(\cdot)$. Dessa forma, os limites da incerteza ϵ_s podem ser calculados a partir dos limites de suas componentes, que são definidos como: $\epsilon_{pi} \in [\epsilon_{pi\min}, \epsilon_{pi\max}]$ e $\epsilon_{Ai} \in [\epsilon_{Ai\min}, \epsilon_{Ai\max}]$.

Para o cálculo dos limites da componente ϵ_p verifica-se a propagação dos piores casos dos valores de ϵ_x , através da função aproximada. Para tal, pode-se definir:

$$\begin{aligned}\lambda_{1i} &= \tilde{f}(x_i + \epsilon_{xi\max}) - \tilde{f}(x_i) \text{ e} \\ \lambda_{2i} &= \tilde{f}(x_i + \epsilon_{xi\min}) - \tilde{f}(x_i).\end{aligned}\quad (6)$$

Inicialmente, não se dispõe da função aproximada. Entretanto, a equação (6) pode ser aproximada para utilizar a função não aproximada:

$$\begin{aligned}\lambda_{1i} &= f(x_i + \epsilon_{xi\max}) - f(x_i) \text{ e} \\ \lambda_{2i} &= f(x_i + \epsilon_{xi\min}) - f(x_i).\end{aligned}\quad (7)$$

Ainda, para os casos em que $\epsilon_{x\max} = -\epsilon_{x\min}$, em que os valores de $\epsilon_{x\max}$ são pequenos para toda a faixa de variação de x , e em que a função f é diferenciável, pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$\lambda_{1i} \approx -\lambda_{2i} \approx f'(x_i)\epsilon_{xi\max}.\quad (8)$$

Os limites da componente originada pela propagação da incerteza ϵ_x podem então ser calculados por:

$$\epsilon_{pi\max} = \max(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}) \text{ e } \epsilon_{pi\min} = \min(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}).\quad (9)$$

O erro de aproximação ϵ_A pode ser calculado para todo o conjunto de valores de x por:

$$\epsilon_{Ai} = \tilde{f}(x_i) - f(x_i).\quad (10)$$

Finalmente, os limites da incerteza ϵ_s podem ser calculados por:

$$\epsilon_{si\max} = \epsilon_{pi\max} + \epsilon_{Ai} \text{ e } \epsilon_{si\min} = \epsilon_{pi\min} + \epsilon_{Ai}\quad (11)$$

A componente devido à propagação da incerteza na variável x , ϵ_p , calculada através de (7), não depende da função aproximada, ao contrário de ϵ_A .

4 Geração da função aproximada

A função aproximada é gerada a partir de valores armazenados em uma LUT. O problema de dimensionamento da LUT consiste em definir um algoritmo que forneça:

- O número de pontos de quebra e de coeficientes;
- O valor dos pontos de quebra e dos coeficientes;
- A resolução de armazenamento da LUT.

O procedimento para o cálculo da resolução de armazenamento da LUT é desenvolvido a seguir. Entretanto um procedimento, ou algoritmo, para definição do número de pontos de quebra e cálculo dos valores dos coeficientes que garanta uma solução ótima é bastante complexo.

Definindo-se o erro máximo aceitável de geração dos valores de s em (1), pode-se definir a faixa aceitável do erro de aproximação a partir de (2) e de (11), por:

$$\epsilon_{Ai\min} = -\hat{\epsilon}_y - \epsilon_{pi\min} \text{ e } \epsilon_{Ai\max} = \hat{\epsilon}_y - \epsilon_{pi\max}.\quad (12)$$

Ainda, deve-se garantir que a componente originada da propagação da incerteza em x seja sempre menor que o erro máximo aceitável de geração de s , ou seja:

$$|\epsilon_{pi\min}| < \hat{\epsilon}_y \text{ e } |\epsilon_{pi\max}| < \hat{\epsilon}_y.\quad (13)$$

Os valores calculados a partir de (12) podem então ser utilizados para verificar se a resolução dos valores gerados, utilizando a função aproximada, corresponde à resolução mínima aceitável.

Uma vez que a função aproximada é gerada a partir de valores armazenados na LUT, e supondo que não existe perda de resolução no cálculo dos valores em y , a resolução mínima de armazenamento na tabela deve ser tal que o erro de quantização proporcionado (devido a resolução da tabela) seja igual ao mínimo valor de ϵ_A . Ou seja:

$$N_T \geq \log_2 \left(\frac{y_{\max} - y_{\min}}{2 \min\{\epsilon_{A\max}, -\epsilon_{A\min}\}} \right),\quad (14)$$

em que $\{\epsilon_{A\max}, -\epsilon_{A\min}\}$ é a concatenação dos dois vetores.

O procedimento generalizado para o dimensionamento da tabela deve realizar as seguintes etapas:

- Definir a mínima resolução de geração dos valores da variável dependente, N_T ;
- Calcular a componente devido à propagação da incerteza ϵ_x através de (7) e (9);
- Calcular os valores limites do erro de aproximação ϵ_A através de (12), garantindo (13). Caso contrário, deve-se modificar a resolução

desejada de geração de y ou diminuir a incerteza associada à x ;

- Definir a resolução de armazenamento da tabela, N_T , através de (14);
- Utilizar um algoritmo específico para procurar os pontos de quebra em x e os valores dos coeficientes.

O algoritmo para dimensionamento da tabela deve procurar os pontos de quebra de tal forma que o erro de aproximação para cada valor de x esteja sempre contido dentro dos limites aceitáveis, ou seja: $\epsilon_{Ai} \in [\epsilon_{Ai\min}, \epsilon_{Ai\max}]$. Diversos algoritmos podem ser utilizados que podem fornecer vários resultados satisfatórios, mas, devido à característica não linear do problema, proporcionada pela quantização dos valores, não se dispõe de uma formulação para indicar uma solução ótima.

5 Avaliação de funções aproximadas

Em muitas situações é de interesse avaliar do ponto de vista comparativo soluções obtidas por diferentes métodos e levando em conta parâmetros e aproximações diferentes. Neste cenário, garantindo a resolução de geração, pode-se verificar dois aspectos dominantes: 1) A melhor solução é aquela que utiliza menos memória e que resulta em um número menor de pontos de quebra e menor resolução de armazenamento; 2) Para um conjunto de soluções com o mesmo número de pontos de quebra, m , e mesma resolução de armazenamento, N_T , a melhor solução é aquela que causa menor perda de resolução.

Observa-se empiricamente que quanto menor o número de pontos de quebra, mais próximo ao pior caso do erro de aproximação fica dos limites. Isso torna os dois aspectos definidos anteriormente conflitantes: a melhor solução é aquela que utiliza menos memória e que se aproxima mais da função ideal, mas, quanto menos memória utilizada, mais distante a função aproximada fica da função ideal. Dessa forma, para definir um índice geral de avaliação, faz-se necessário avaliar os dois aspectos independentemente, levando em conta a relevância de cada um deles.

O primeiro aspecto é de maior relevância quando se considera a redução de memória mais importante. Dessa forma, para soluções que satisfaçam os requisitos de resolução de geração da variável de interesse, a melhor é aquela que ocupa menos memória. Define-se o primeiro índice de avaliação como sendo:

$$\eta_1 = \frac{mN_T}{N_{T\min}} - 1, \quad (15)$$

em que $N_{T\min}$ é o mínimo valor de N_T calculado através de (14)

O mínimo valor de η_1 , calculado através de (15), é zero e ocorre para o caso em que a aproximação é feita utilizando apenas um ponto de quebra e usando a resolução mínima de armazenamento

Para o segundo aspecto, deve-se avaliar qual solução causa menor perda de resolução, para toda a faixa de variação de x , dentre as que tenham o mesmo número de pontos de quebra e mesma resolução de armazenamento. A perda de resolução é função da soma do erro de aproximação e da incerteza propagada e quanto maior o valor dessa soma pior é a aproximação. O índice de avaliação para o segundo aspecto pode ser expresso por:

$$\eta_2 = \max(\{\epsilon_{Ai} + \epsilon_{Pi\max}, -\epsilon_{Ai} - \epsilon_{Pi\min}\}) / \hat{\epsilon}_y. \quad (16)$$

Substituindo (12) em (16), pode-se escrever:

$$\eta_2 = \max(\{\epsilon_{Ai} - \epsilon_{Ai\max} + \hat{\epsilon}_y, -\epsilon_{Ai} + \epsilon_{Ai\min} + \hat{\epsilon}_y\}) / \hat{\epsilon}_y, \quad (17)$$

que pode ser ainda reduzida para:

$$\eta_2 = \max(\{\epsilon_{Ai} - \epsilon_{Ai\max}, \epsilon_{Ai\min} - \epsilon_{Ai}\}) / \hat{\epsilon}_y + 1 \quad (18)$$

O máximo valor possível do segundo índice de avaliação, calculado através de (18), é igual a 1 e ocorre quando a função aproximada atinge um dos limites de aproximação. O mínimo valor possível deste índice é igual a $\max(\{\epsilon_{Pi\max}, -\epsilon_{Pi\min}\}) / \hat{\epsilon}_y$, e ocorre quando ϵ_{Ai} é zero para o maior valor de $\epsilon_{Pi\max}$. Isso implica que para o menor valor deste índice, o erro de aproximação não necessita ser zero para toda faixa de variação de x , mas apenas no maior valor da incerteza propagada.

Uma vez que os índices η_1 e η_2 são de diferentes magnitudes, o índice geral de avaliação pode ser calculado pela soma destes, dada por:

$$\eta = \frac{mN_T}{N_{T\min}} + \frac{\max(\{\epsilon_{Ai} - \epsilon_{Ai\max}, \epsilon_{Ai\min} - \epsilon_{Ai}\})}{\hat{\epsilon}_y} \quad (19)$$

6 Exemplos

Nesta seção, apresenta-se um exemplo de aproximação de uma função seno utilizando interpolação linear a partir de valores armazenados em uma tabela de equivalência. Por ser uma função simétrica, se faz necessário aproximar apenas um quarto da função, com o ângulo variando de zero a 90° , e os demais valores podem ser gerados através de lógica combinacional. Esse exemplo é ilustrativo e, dessa forma, utiliza-se uma resolução de geração pequena, de forma que os resultados apresentados nas diversas figuras possam ser facilmente compreendidos.

6.1 Limites da função aproximada

Considera-se que os valores do ângulo são quantizados em quatro bits e a incerteza associada é de $\frac{1}{2}$ LSB que equivale a $\epsilon_{x\max} = 2,1825^\circ$. Na tabela (2), apresentam-se os valores binários de x e o ângulo equivalente com duas casas decimais.

Tabela 2. Valores binários de x e ângulo equivalente

\tilde{x}	0	1	2	3	4	5	6	7
x	2,81	8,44	14,06	19,69	25,31	30,94	36,56	42,19
\tilde{x}	8	9	10	11	12	13	14	15
x	47,81	53,44	59,06	64,69	70,31	75,94	81,56	87,19

Deseja-se gerar os valores aproximados de $\sin(x)$ com resolução de três bits, e dessa forma tem-se, a partir de (1), $\tilde{\epsilon}_y = 0,0625$. A função de geração a ser aproximada, devido à quantização, pode ser calculada por:

$$y = \sin\left(90 \frac{(\tilde{x} + 0,5)}{16}\right) \quad (20)$$

Na Figura 1, apresenta-se os limites da incerteza propagada e os limites do erro de aproximação.

A partir da Figura 1, pode-se observar como a incerteza inicial, constante para todos os valores de x , é modificada pela função não linear.

Na Figura 2, apresenta-se a função ideal, os limites da função aproximada e os limites de geração de y , em função dos valores binários de x .

6.2 Avaliação de soluções de aproximação

A resolução mínima de armazenamento na tabela de equivalência é calculada a partir da equação (14),

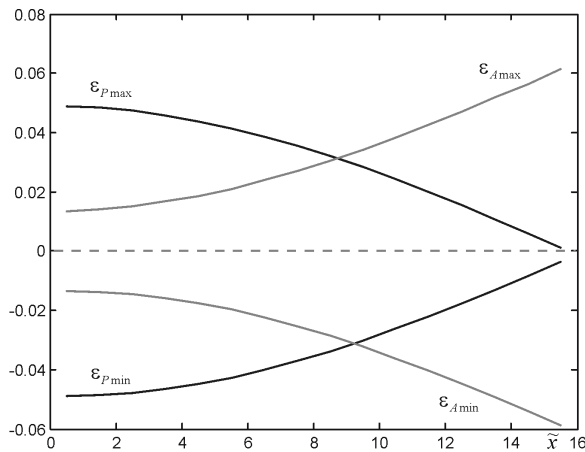


Figura 1. Limites da incerteza propagada e do erro de aproximação

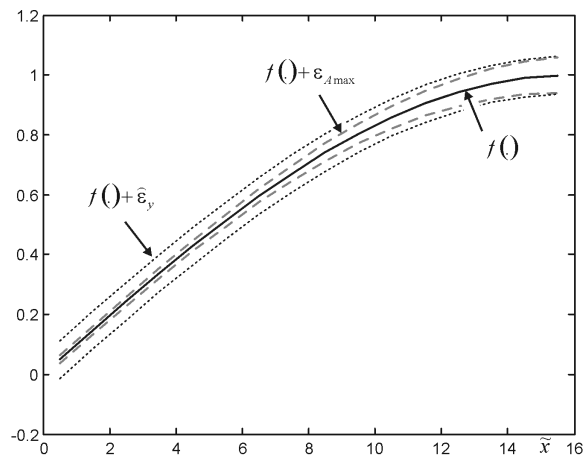


Figura 2. Função ideal, limites de geração dos valores de y e limites da função aproximada

$N_T \geq 5,14$ bits. Para verificação do critério de avaliação, apresentam-se a seguir três soluções empíricas, com diferentes valores de N_T e de coeficientes, considerando os limites calculados no item 6.1. Para esse caso de estudo, o máximo e o mínimo valores possíveis de η_2 são 1 e 0,7832, respectivamente.

Nas Figuras 3, 4 e 5, apresentam-se os erros de aproximação para três soluções diferentes. Os índices de avaliação são indicados nas figuras e locais dos pontos de quebra que são armazenados na tabela são representados por "x" sobre o eixo.

Pode-se observar que para um valor de N_T suficientemente grande, o erro de aproximação apresenta uma forma bem comportada, que no caso é a diferença da reta aproximada e a curva ideal. Entretanto, quando a resolução de armazenamento na tabela é reduzida, essa característica deixa de existir devido à quantização dos coeficientes e resolução limitada do cálculo da função aproximada.

7 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um procedimento para definição de restrições e limites para aproximação de funções não lineares por funções polinomiais por

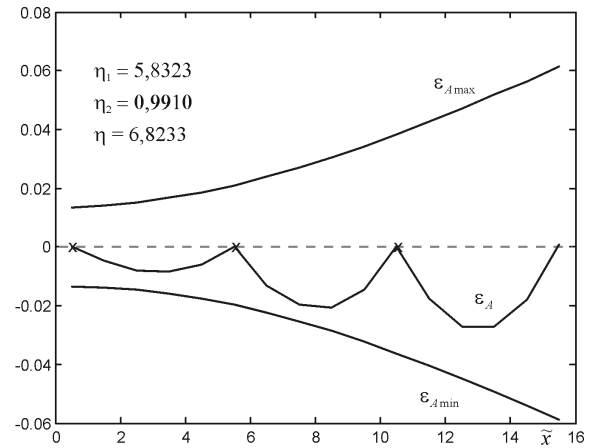


Figura 3. Erro de aproximação para $m = 3$ e $N_T = 10$, com coeficientes calculados utilizando pontos sobre a curva ideal.

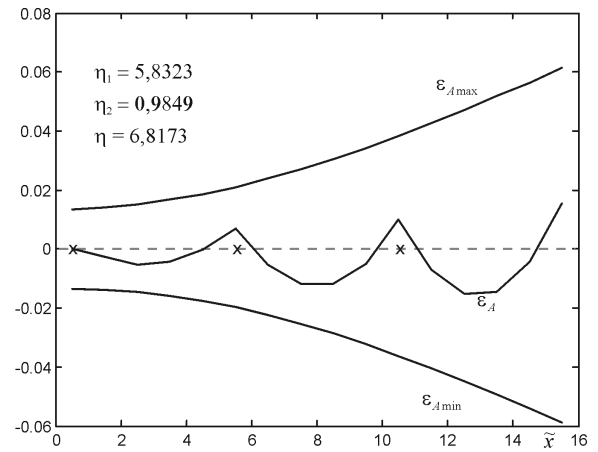


Figura 4. Erro de aproximação para $m = 3$ e $N_T = 10$, com coeficientes calculados utilizando pontos fora da curva ideal.

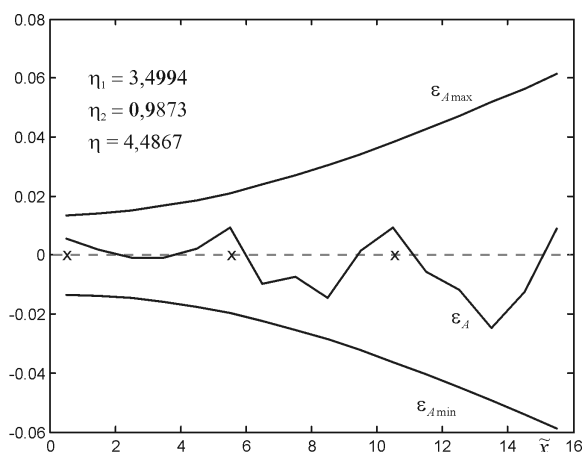


Figura 5. Erro de aproximação para $m = 3$ e $N_T = 6$, com coeficientes calculados utilizando pontos fora da curva ideal.

partes, para aplicação em sistemas embarcados. No procedimento é considerado que a variável independente possui uma incerteza associada na sua geração. Apresentou-se também um critério de avaliação de soluções de aproximação que pode ser utilizado para comparar diversas soluções fornecidas por diferentes métodos.

A partir do exemplo fornecido, pode-se observar que o problema de aproximação, quando se restringe a resolução e o cálculo é realizado em virgula fixa, é bastante complexo. Quanto menor a resolução de armazenamento mais descontínua e não linear é a função de aproximação resultante, que se deve principalmente à quantização dos coeficientes na tabela de equivalência e do cálculo dos valores da função aproximada.

Referências Bibliográficas

- Burden, R. L. e J. D. Faires (1989). *Numerical analysis*, 4th ed. Boston: PWS-KENT Pub. Co.
- Catunda, S. Y. C., et al. (1998a). An Integrated Circuit for Space Vector Modulation. *Proceedings of International Conference on Microelectronics and Packaging*, Curitiba - PR, Brazil, pp. 415-421
- Catunda, S. Y. C., G. S. Deep, e R. C. S. Freire (1998b). Compensação da Temperatura na Medição de Concentração de Oxigênio Dissolvido. *Proceedings of XII Congresso Brasileiro de Automática*, Uberlândia, MG - Brazil, pp. 9-14
- Catunda, S. Y. C., J. -F. Naviner, G. S. Deep, e R. C. S. freire (2000). Look-up Table otimizada para reconstrução de valores de medição utilizando sensores não lineares. *Proceedings of Congresso Brasileiro de Automatica - CBA*, Florianópolis - SC, Brasil, pp.
- Catunda, S. Y. C., J. -F. Naviner, G. S. Deep, e R. C. S. Freire (2001). Optimized Look-up Table for Inter-Measurand Compensation. *Proceedings of IEEE Instrumentation Measurement Technology Conference*, Budapest, Hungary, pp. 128-132
- Chen, D. Z., X. Hu, e P. J. Blatner (1996). Efficient algorithms for orthogonal polygon approximation. *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems - ISCAS*, pp. 779 - 782
- Chua, L. O. e A. -C. Deng (1986). Canonical Piecewise-Linear Modeling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-33, n^o 5, pp 511-525
- Flammini, A., D. Marioli, e A. Taroni (1999). Application of an Optimal Look-Up Table to Sensor Data Processing. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 48, n^o 4, pp 813-816
- Julian, P., M. Jordan, e A. Desages (1998). Canonical piecewise-linear approximation of smooth functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 45, n^o 5, pp 567 - 571
- Lygouras, J. N. (1999). Memory Reduction in Look-up Tables for Fast Symmetric Function Generators. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 48, n^o 6, pp 1254-1258
- Manis, G., G. Papakonstantinou, e P. Tsanakas (1997). Optimal piecewise linear approximation of digitized curves. *Proceedings of 13th International Conference on Digital Signal Processing*, pp. 1079 - 1081