

ROBÔS MANIPULADORES SUBATUADOS: CONTROLE H_∞ NÃO LINEAR VIA REPRESENTAÇÃO QUASE-LPV

Adriano A. G. Siqueira Marco Henrique Terra

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de São Paulo em São Carlos
SP, Brasil
{siqueira, terra}@sel.esc.sc.usp.br

Resumo: As características dinâmicas e o controle de sistemas subatuados, vêm sendo extensivamente estudadas. Neste trabalho, serão apresentados os resultados da aplicação do controle H_∞ não linear em um robô manipulador experimental de três *links*. O controle H_∞ aplicado a sistemas não lineares consiste em garantir que o ganho L_2 entre o distúrbio e a saída seja limitado por um nível de atenuação γ . Quando o sistema não linear é representado como um sistema quase-LPV (quase linear com parâmetros variantes), o problema de controle H_∞ consiste em resolver um conjunto de desigualdades matriciais lineares.

Abstract: The dynamics characteristics and the control of underactuated manipulators have been extensively studied. In this paper, the application of nonlinear H_∞ control in a experimental manipulator with three links is presented. H_∞ control applied to nonlinear systems consists in guarantee that the L_2 between the disturbance and the output be bounded by a attenuation level γ . When the nonlinear system is represented as a quasi-LPV (quasi-linear parameter varying), the H_∞ problem consists in solve a set of linear matrix inequalities.

Keywords: nonlinear H_∞ control, quasi-LPV systems, linear matrix inequalities, underactuated manipulator.

1 INTRODUÇÃO

Manipuladores com menos atuadores que graus de liberdade, denominados subatuados, são de grande interesse para muitos pesquisadores (Arai and Tachi, 1991; Bergerman, 1996; Terra et al, 1999). A controlabilidade deste tipo de sistema mecânico e uma estratégia de controle foram primeiramente apresentadas em (Arai and Tachi, 1991). Inicialmente, todas as juntas passivas (sem atuadores) são controladas para suas posições finais desejadas. Em seguida, com as juntas passivas freadas, as juntas ativas (com atuadores) são controladas. Em (Bergerman, 1996), três possibilidades de selecionar as juntas a serem controladas em cada fase de controle são derivadas. Pode-se escolher apenas juntas passivas, passivas e ativas ou apenas ativas. A dificuldade de controlar as coordenadas generalizadas de um manipulador (totalmente atuado ou subatuado) com o objetivo de seguir uma trajetória desejada pode ser de considerável grandeza se incertezas paramétricas e distúrbios externos estiverem presentes.

Em (Terra et al, 1999) um controlador com custo garantido projetado via desigualdades matriciais lineares (DMLs) e utilizando uma linearização em torno de pontos de operação foi aplicado ao robô manipulador subatuado UArm II, um robô planar de três juntas cuja configuração (totalmente atuado ou subatuado) pode ser facilmente alterada via *software*.

De forma alternativa, para atenuar os efeitos de distúrbios externos e incertezas paramétricas, apresenta-se aqui o controle H_∞ não linear aplicado ao robô manipulador UArm II. Neste tipo de controle a relação entre as normas induzidas L_2 dos sinais de entrada (distúrbios) e saída deve ser limitada

por um nível de atenuação γ . A generalização do controle H_∞ para sistemas não lineares invariantes no tempo foi primeiramente apresentada por (van der Schaft, 1992). Basicamente, as condições necessárias e suficientes para que o problema de controle H_∞ tenha solução consistem em resolver equações (inequações) de Hamilton-Jacobi. Várias ferramentas foram desenvolvidas com o objetivo de obter soluções globais para as inequações de Hamilton-Jacobi (van der Schaft, 1992). Entretanto, não há algoritmos eficientes para resolver tais inequações para sistemas com grande número de estados.

Por outro lado, as técnicas desenvolvidas para sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) (Wu et al, 1996) fornecem controladores dependentes dos parâmetros, também chamados de ganhos escalonados, satisfazendo a condição de ganho L_2 menor que γ . A inclusão do conhecimento da taxa de variação dos parâmetros na síntese dos controladores deve satisfazer um conjunto de DMLs (Wu et al, 1996). Quando aplicado em sistemas não lineares, os parâmetros variantes são funções do estado ao invés de variáveis “livres”. Esta representação de um sistema não linear é denominada quase-LPV (quase linear com parâmetros variantes). Em (Cloutier et al, 1996), diferentes representações lineares de um mesmo sistema não linear apresentaram desempenhos diferentes. Com o objetivo de eliminar este comportamento, em (Huang and Jadbabaie, 1998) foi proposto incorporar esta liberdade de escolha da representação quase-LPV no processo de construção do controlador.

Assim, no artigo em (Huang and Jadbabaie, 1998), uma condição de DML de dimensão infinita é derivada englobando todas as representações lineares da dinâmica não linear. Infelizmente o problema de síntese de realimentação do estado é não convexo em ambas as variáveis de projeto, sendo

visto como um problema de desigualdade matricial bilinear (DMB) de dimensão infinita, não havendo garantia de encontrar um ótimo global. Entretanto, analogamente à iteração $D-K$ para síntese μ , um algoritmo iterativo é desenvolvido para encontrar o melhor desempenho possível.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na seção 3, são apresentados o problema de controle H_∞ por realimentação do estado para sistemas LPV com taxa de variação dos parâmetros limitada (Wu et al, 1996), a extensão para sistemas quase-LPV (Huang and Jadbabaie, 1998) e os procedimentos computacionais para solução das DMLs dependentes dos parâmetros (estados) (Wu et al, 1996); a representação quase-LPV de um robô manipulador subatuado é derivada na seção 4 e os resultados experimentais obtidos pela aplicação desta técnica no robô manipulador subatuado UArm II são apresentados na seção 5.

2 CONTROLE H_∞ NÃO LINEAR

Nesta seção, o procedimento de projeto do controlador H_∞ por realimentação do estado será descrito para sistemas LPV e quase-LPV. Utilizar-se-á a seguinte notação: \mathfrak{R}^+ é o conjunto de números reais não negativos, $C^1(\mathfrak{R}^m, \mathfrak{R}^n)$ é o conjunto de funções continuamente diferenciáveis que fazem o mapeamento de \mathfrak{R}^m para \mathfrak{R}^n , e S é o conjunto de matrizes simétricas. A norma euclidiana de um vetor é denotada por $\|\cdot\|$, ou seja, $\|z\|^2 = z^T z$ para $z \in \mathfrak{R}^k$. A notação L_2 será utilizada para sinais com energia limitada, ou seja, $L_2(0, T) = \left\{ w : \int_0^T \|w(t)\|^2 dt < \infty \right\}$.

2.1 Síntese do Controle H_∞ para Sistemas LPV via Realimentação do Estado

Considere o problema de síntese do controle via realimentação do estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_1(\rho(t)) & B_2(\rho(t)) \\ C_1(\rho(t)) & 0 & 0 \\ C_2(\rho(t)) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

sendo $w \in \mathfrak{R}^p$ o distúrbio, $z = [z_1 \ z_2]^T \in \mathfrak{R}^q$ variáveis de saída e $x \in \mathfrak{R}^n$ as variáveis de estados. Os parâmetros ρ variam dentro do conjunto:

$$F_P^v := \{ \rho \in C^1(\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}^m) : \rho(t) \in P, |\dot{\rho}_i| \leq v_i, i = 1, \dots, m \} \quad (2.2)$$

sendo $P \subset \mathfrak{R}^m$ um conjunto compacto, e $v = [v_1 \ \dots \ v_m]^T$ com $v_i \geq 0$.

O objetivo é encontrar uma função contínua $F(\rho)$ tal que o sistema em malha fechada possua ganho L_2 menor que γ com lei de realimentação de estados igual a $u(t) = F(\rho(t))x(t)$.

Lema 2.1. (Wu et al, 1996) Se existe uma função matricial contínua e diferenciável $X(\rho) > 0$ para todo $\rho \in P$ que satisfaz

$$\begin{bmatrix} E(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3)$$

sendo

$$E(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm v_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho)^T - B_2(\rho)B_2^T(\rho)$$

e $\hat{A}(\rho) = A(\rho) - B_2(\rho)C_2(\rho)$, então, com lei de realimentação do estado

$$u(t) = -(B_2(\rho(t))X^{-1}(\rho(t)) + C_2(\rho(t)))x(t)$$

o sistema em malha fechada possui ganho $L_2 \leq \gamma$ para toda trajetória paramétrica $\rho(t) \in F_P^v$.

O resultado acima é uma generalização natural da teoria de H_∞ linear para plantas lineares com parâmetros variantes. Ao invés de uma função de Lyapunov quadrática para a planta linear invariante no tempo, uma função de Lyapunov paramétrica $V(x,t) = x^T(t)X^{-1}(\rho(t))x(t)$ é assumida. Note que, na realidade (2.3) representa 2^m inequações, pois o termo $\sum \pm (\bullet)$ indica que toda combinação $+(\bullet)$ e $-(\bullet)$ deve ser satisfeita.

2.2 Modelo Quase-LPV para Sistemas Não Lineares com Entradas Afins

Baseado na observação que o modelo quase-LPV não é unicamente determinado pelas dinâmicas não lineares, em (Huang and Jadbabaie, 1998) foi proposto incorporar esta liberdade de escolha da representação quase-LPV no problema de otimização. Primeiramente, é estabelecida a parametrização de todas as representações lineares dependentes do estado de algumas dinâmicas não lineares com entradas afins.

Lema 2.2. (Huang and Jadbabaie, 1998) Suponha uma função $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ continuamente diferenciável com $f(0) = 0$. Então, uma função contínua matricial estimada $A_0(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$ pode sempre ser encontrada tal que $f(x) = A_0(x)x$. Além disso, todas as possíveis funções $A(x)$ satisfazendo $f(x) = A(x)x$ podem ser parametrizadas como

$$A(x) = A_0(x) + N(x)$$

sendo que $N: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$ satisfaz $N(x)x = 0$.

Note que $A(x)$ no lema acima não é uma linearização de $f(x)$. De fato, temos um número infinito de possíveis representações matriciais $A(x)$ para uma dada $f(x)$. Portanto, uma dinâmica não linear dada por

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)w$$

pode ser transformada para

$$\dot{x} = A(x)x + g(x)w,$$

que se assemelha a um sistema linear, mas com matrizes de estado dependentes das variáveis de estado ao invés de serem constantes como no caso linear. Para manter o número de parâmetros variantes a um mínimo, a dependência das matrizes de estado $A(x)$ e $g(x)$ nas variáveis de estado será mudada para $\rho(x) \in C^1(\mathcal{X}^n, \mathcal{X}^m)$ com $m \leq n$, isto é, $A(x)$ e $g(x)$ tornam-se $A(\rho(x))$ e $g(\rho(x))$ respectivamente. Por enquanto, $\rho(x)$ pode simplesmente representar parte das variáveis de estado.

A seguinte representação quase-LPV do sistema não linear com entradas afins será usada para o problema de síntese do controlador:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(x)) & B_1(\rho(x)) & B_2(\rho(x)) \\ C_1(\rho(x)) & 0 & 0 \\ C_2(\rho(x)) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Esta representação é diferente do verdadeiro modelo LPV (2.1), apenas pelo fato que os parâmetros ρ_i 's são agora funções das variáveis de estado, isto é, $\rho = \rho(x)$.

Como estabelecido no lema 2.2, tem-se um número infinito de escolhas na construção do modelo quase-LPV para dinâmicas não lineares. Na próxima seção, será proposto um meio sistemático para gerar uma escolha original de $A(x)$ que pode resultar no melhor desempenho.

2.3 Síntese do Controle H_∞ para Sistemas Quase-LPV via Realimentação do Estado: Iteração X – N

Considere o modelo quase-LPV (2.4). Assume-se que o parâmetro ρ varie no conjunto permissível F_P^v (2.2).

Teorema 2.1. (Huang and Jadbabaie, 1998) Se for possível encontrar uma $X(\rho(x)) > 0$ e uma $N(\rho(x))$ com $N(\rho(x))x = 0$ que satisfaçam as seguintes desigualdades matriciais:

$$\begin{bmatrix} E^*(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.5)$$

sendo

$$E^*(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm v_i(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_i} - B_2(\rho)B_2^T(\rho) + (\hat{A}(\rho) + N(\rho))X(\rho) + X(\rho)(\hat{A}(\rho) + N(\rho))^T$$

e $\hat{A}(\rho) = A(\rho) - B_2(\rho)C_2(\rho)$ para todo $\rho \in P$, então o sistema em malha fechada possui ganho $L_2 \leq \gamma$ sujeito a lei de realimentação do estado:

$$u(x) = -(B_2(\rho(x))X^{-1}(\rho(x)) + C_2(\rho(x)))x.$$

Comparado com o resultado do LPV padrão estabelecido no lema 2.1, uma nova função matricial estimada $N(\rho(x))$ é

acrescentada para compensar a não unicidade do modelo quase-LPV devido às dinâmicas não lineares. O melhor nível γ associado com uma particular $A(\rho)$ pelo lema 2.1 serve como um limite superior do melhor ganho L_2 possível do sistema não linear em malha fechada.

Note que a equação (2.5) não é afim em $X(\rho)$ e $N(\rho)$. Para um valor de ρ , (2.5) é uma DMB em X e N . A minimização de γ para ambas X e N nesta DMB é um problema não convexo, entretanto, quando X ou N é fixada e tenta-se minimizar γ para a outra, este se torna um problema convexo. Analogamente à iteração “D - K” para síntese μ , uma iteração “X - N” é proposta como um esquema prático para encontrar o melhor desempenho:

1. Encontre uma representação quase-LPV (2.4) para o sistema não linear em malha aberta.
2. Escolha os parâmetros variantes ρ , os limites do parâmetro P e a taxa de variação limite v .
3. Calcule o melhor nível γ possível para o modelo quase-LPV (lema 2.1). Se o desempenho é satisfatório, pare.
4. Calcule o melhor γ sobre toda $N(\rho)$ com $X(\rho)$ fixada do passo anterior (teorema 2.1). Se o novo γ é satisfatório ou não se alterou, pare.
5. Substitua $A(\rho)$ por $A(\rho) + N(\rho)$. Retorne ao passo 3.

Note que esta estratégia não é garantia de convergência para um ótimo global porque este problema não é convexo para ambas X e N . No passo 4, a DMB (2.5) é reduzida para uma DML em $N(\rho)$ desde que $X(\rho)$ é mantida fixa. Selecionando um conjunto de funções de base para $N(\rho)$ que satisfaçam $N(\rho(x))x = 0$, pode-se encontrar uma solução aproximada para (2.5) resolvendo a DML.

Um esquema computacional prático (Huang and Jadbabaie, 1998; Wu et al, 1996) pode ser utilizado para resolver as DMLs presentes nos problemas LPV e quase-LPV. Por simplicidade, considere o problema de encontrar $X(\rho)$ na equação (2.3). Primeiro, escolha um conjunto de funções $C^1, \{f_i(\rho)\}_{i=1}^M$, como base para $X(\rho)$, ou seja,

$$X(\rho) = \sum_{i=1}^M f_i(\rho)X_i \quad (2.6)$$

sendo $X_i \in S^{m \times n}$ a matriz coeficiente para $f_i(\rho)$. Se $X(\rho)$ em (2.3) é substituído por (2.6), o vínculo (2.6) são DMLs em termos das variáveis matriciais $\{X_i\}_{i=1}^M$ quando o parâmetro ρ é fixado. Para resolver este problema de otimização de dimensão infinita, divide-se o conjunto de parâmetros P em L pontos $\{\rho_k\}_{k=1}^L$ em cada dimensão. Então calcula-se as DMLs acima para estes pontos. Desde que (2.3) consiste de 2^m vínculos, um total de $(2^m+1)L^m$ desigualdades matriciais afins em termos das M variáveis matriciais $\{X_i\}$ devem ser resolvidas. Uma aproximação da densidade de pontos particionados que garantem uma solução global das DMLs é dado em (Wu et al, 1996).

Para a equação (2.5), deve-se escolher um conjunto de funções $C^1, \{g_i(\rho)\}_{i=1}^M$, como base para $N(\rho)$, lembrando que a condição $N(\rho)x = 0$ deve ser satisfeita para todo ρ . Por

exemplo, se o vetor de estado do sistema é da forma $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ então uma possível forma para a matriz $N(\rho)$ é dada por:

$$N(\rho) = \sum_{i=1}^M g_i(\rho) N_i \begin{bmatrix} -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Este esquema computacional possui algumas limitações. O número de parâmetros considerados e o número de divisões L devem ser escolhidos tal que a solução seja alcançada em um número de iterações realizáveis. Outro problema é a falta de justificativas teóricas na escolha das funções de base para $X(\rho)$ e $N(\rho)$. Geralmente, escolhem-se funções similares às encontradas nas matrizes de estado $A(\rho)$ (Apkarian and Adams, 1998).

3 MANIPULADORES SUBATUADOS

Robôs manipuladores subatuados são sistemas mecânicos com menos atuadores que graus de liberdade. Por esta razão, o controle das juntas passivas (sem atuadores) é feito considerando o acoplamento dinâmico entre elas e as juntas ativas (com atuadores). Aqui, nós consideramos que as juntas passivas possuem freios. A estratégia é controlar, aplicando torques nas ativas, todas as juntas passivas até alcançar a posição final desejada, e então, acionar os freios. Em seguida, todas as juntas ativas são controladas.

Considere um manipulador com n juntas, das quais n_p são passivas e n_a são ativas. Sabe-se que não mais que n_a juntas podem ser controladas em cada instante, com o auxílio de freios (Arai and Tachi, 1991). Utilizando-se disto, agrupam-se as n_a juntas sendo controladas no vetor $q_c \in \mathcal{R}^{n_a}$. As juntas restantes são agrupadas na vetor $q_r \in \mathcal{R}^{n-n_a}$. Existem três possibilidades de se formar o vetor q_c (Bergerman, 1996):

1. q_c contém n_a juntas passivas: quando $n_p \geq n_a$, todas as outras juntas passivas, se houver, permanecem freadas.
2. q_c contém juntas ativas e passivas: todas as outras juntas passivas, se houver, permanecem freadas.
3. q_c contém somente juntas ativas.

A estratégia de controle é: primeiro, escolha o vetor q_c satisfazendo as possibilidades 1 ou 2 (de acordo com n_p), até todas as juntas passivas chegarem a posição final; segundo, escolha q_c satisfazendo a possibilidade 3 e controle as juntas ativas até a posição desejada. A equação dinâmica de um robô perturbado pode ser formulada pela Teoria de Lagrange como:

$$\tau + \delta = M_0(q)\ddot{q} + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + F_0(\dot{q}) + G_0(q) \quad (3.2)$$

com

$$\delta = -(\Delta M(q)\ddot{q} + \Delta C(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta F(\dot{q}) + \Delta G(q) - w)$$

sendo $q \in \mathcal{R}^n$ as posições angulares das juntas, $M_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia (simétrica e positiva definida) nominal, $C_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ a matriz de Coriolis nominal, $F_0 \in \mathcal{R}^n$ os torques de fricção nominais, $G_0 \in \mathcal{R}$ os torques gravitacionais nominais e $\tau \in \mathcal{R}^n$ os torques aplicados. As matrizes ΔM ΔC ΔF ΔG são as incertezas paramétricas relacionadas às matrizes M , C , F e G ,

respectivamente. Os distúrbios externos estão incluídos no vetor w .

A equação dinâmica (3.2) pode ser particionada como (aqui omite-se o índice 0):

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ar} & M_{ac} \\ M_{ur} & M_{uc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ar} & C_{ac} \\ C_{ur} & C_{uc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_a \\ F_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a \\ G_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_u \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

na qual os índices a e u representam as juntas ativas e passivas livres (freios não acionados), respectivamente. Isolando o vetor \ddot{q}_r na segunda linha de (3.3) e substituindo na primeira linha, obtém-se:

$$\tau_a = \bar{M}_0 \ddot{q}_c + \bar{C}_0 \dot{q}_c + \bar{D}_0 \dot{q}_r + \bar{F}_0 + \bar{G}_0 + \bar{\delta} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{com } \bar{M}_0 &= M_{ac} - M_{ar} M_{ur}^{-1} M_{uc}, \quad \bar{C}_0 = C_{ac} - M_{ar} M_{ur}^{-1} C_{uc}, \\ \bar{D}_0 &= C_{ar} - M_{ar} M_{ur}^{-1} C_{ur}, \quad \bar{F}_0 = F_a - M_{ar} M_{ur}^{-1} F_b, \\ \bar{G}_0 &= G_a - M_{ar} M_{ur}^{-1} G_b \text{ e } \bar{\delta} = \delta_a - M_{ar} M_{ur}^{-1} \delta_b. \end{aligned}$$

Define-se o erro de acompanhamento como:

$$\tilde{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{q}_c - \dot{q}_c^d \\ q_c - q_c^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_c \\ \tilde{q}_c \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

sendo q_c^d e $\dot{q}_c^d \in \mathcal{R}^n$ a trajetória de referência desejada e sua correspondente velocidade, respectivamente. Assume-se que as variáveis q_c^d e \dot{q}_c^d e \ddot{q}_c^d , a aceleração desejada, satisfazem os limites físicos e cinemáticos do objetivo de controle. A equação dinâmica para o erro de acompanhamento do estado é encontrada utilizando (3.4) e (3.5)

$$\dot{\tilde{x}}_c = A(\tilde{x}_c) \tilde{x}_c + Bu + B\bar{\delta} \quad (3.6)$$

com

$$A(\tilde{x}_c) = \begin{bmatrix} -\bar{M}_0^{-1}(q_c) \bar{C}_0(q_c, \dot{q}_c) & 0 \\ I_{n_a} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} I_{n_a} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \bar{M}_0^{-1}(\tau_a - \bar{M}_0 \ddot{q}_c^d - \bar{C}_0(q_c, \dot{q}_c) \dot{q}_c^d - \bar{D}_0 \dot{q}_r - \bar{F}_0(\dot{q}) - \bar{G}_0(q)).$$

Embora a matriz \bar{M}_0 dependa explicitamente das posições, pode-se considerá-la como função do erro de acompanhamento de posição e do tempo. Tal afirmação pode ser visualizada pela seguinte observação:

$$\bar{M}_0(q_c) = \bar{M}_0(\tilde{q}_c + q_c^d) = \bar{M}_0(\tilde{x}_c).$$

O mesmo pode ser observado para \bar{C}_0 . Portanto, a equação (3.6) pode ser considerada uma representação quase-LPV para o robô manipulador, ou seja, com $A(\tilde{x}_c)$.

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O algoritmo de projeto proposto na seção 2.3 como solução do problema H_∞ para sistemas quase-LPV via realimentação do estado foi aplicado ao robô manipulador subatuado experimental UArm II (Figura 1).

As matrizes M , C e G da equação (3.1) são encontradas facilmente pela teoria de Lagrange para um manipulador planar. Entretanto, o termo F é determinado de acordo com o tipo de atrito de fricção atuando no robô. Neste trabalho, um termo de fricção dependente da velocidade é utilizado, $F^T = [f_1 \dot{q}_1 \quad f_2 \dot{q}_2 \quad f_3 \dot{q}_3]$, sendo os valores f_1 , f_2 e f_3 escolhidos após testes empíricos.



Figura 1 - UArm II.

Os parâmetros nominais cinemáticos e dinâmicos do manipulador utilizados para calcular as matrizes nominais M_0 , C_0 , F_0 e G_0 são mostrados na Tabela 1.

Junta	M_i (kg)	I_i (kg.m ²)	l_i (m)	l_{c_i} (m)	f_i (kg.m ² /s)
1	0,850	0,0075	0,203	0,096	0,28
2	0,850	0,0075	0,203	0,096	0,18
3	0,625	0,0060	0,203	0,077	0,10

Tabela 1. Parâmetros do robô

A configuração utilizada para o experimento é denominada APA, ou seja, a junta 2 é passiva e as juntas 1 e 3 são ativas. Sendo que a configuração APA possui $n_a = 2$, duas juntas podem ser controladas em cada fase. Na primeira fase, o vetor de juntas controladas, q_c , é escolhido como $q_c = [q_2 \quad q_3]$, i.e., uma junta passiva, 2, e uma ativa, 3, são selecionadas (possibilidade 2 descrita na seção 3). Na segunda fase, as juntas ativas são selecionadas para formar o vetor de juntas controladas, $q_c = [q_1 \quad q_3]$ (possibilidade 3). Nesta fase a junta passiva, 2, é mantida freada, desde que ela já alcançou a

posição final desejada. Os vetores $T^1 = [T_2 \quad T_3]$ e $T^2 = [T_1 \quad T_3]$ referem-se aos tempos das trajetórias desejadas para as fases 1 e 2, respectivamente.

Para aplicar o algoritmo descrito na seção 2.3, o sistema robô manipulador subatuado deve ser representado pela equação (2.4). Para a primeira fase, escolhe-se como parâmetros os estados representando os erros de posição das juntas 2 e 3, ou seja,

$$\rho(\tilde{x}) = [\tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3]$$

sendo \tilde{q}_2 e \tilde{q}_3 os erros de posição das juntas 2 e 3, respectivamente. Considera-se como saídas do sistema, z_1 e z_2 , os erros de posição e velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente. Portanto, o sistema pode ser descrito pela equação (2.4) com:

$$A(\rho(x)) = A(\rho(\tilde{x}))$$

$$B_1(\rho(x)) = B$$

$$B_2(\rho(x)) = B$$

$$C_1(\rho(x)) = I_{n_a} \text{ e } C_2(\rho(x)) = 0.$$

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30,30]^\circ \times [-30,30]^\circ$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq 50^\circ/\text{s}$. Como foi visto anteriormente, uma alternativa para a escolha das funções utilizadas como base para $X(\rho)$ e $N(\rho)$, consiste em utilizar funções contidas nas matrizes de estado. A função trigonométrica *coseno* está presente nas matrizes M e C que compõem a matriz de estado A , e portanto, as funções escolhidas foram: $f_1 = 1$, $f_2 = \cos(\tilde{q}_2)$, $f_3 = \cos(\tilde{q}_3)$, $g_1 = 1$, $g_2 = \cos(\tilde{q}_2)$ e $g_3 = \cos(\tilde{q}_3)$.

As matrizes $X(\rho)$ e $N(\rho)$, quando representadas nesta base são dadas por:

$$X(\rho) = \sum_{i=1}^3 f_i(\rho) X_i$$

$$\text{e } N(\rho) = \sum_{i=1}^3 g_i(\rho) N_i \begin{bmatrix} -\tilde{q}_c^T & \dot{\tilde{q}}_c^T \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que a matriz $N(\rho)$ satisfaz a condição $N(\rho)x = 0$. O espaço dos parâmetros foi dividido em 5 pontos, ou seja $L = 5$. Utilizando-se a expressão gerada na seção 2.7 com $m = 2$, sabe-se que 125 DMLs devem ser resolvidas para as variáveis X_i e N_i . Para resolver este problema foi utilizado o *toolbox LMI* do MatLab. O valor de atenuação mínimo encontrado, realizando-se 2 iterações $X-N$, foi $\gamma = 1,35$

Para a segunda fase, os parâmetros escolhidos e que compõem o vetor de estados foram $\rho(\tilde{x}_c) = [\tilde{q}_3 \quad \dot{\tilde{q}}_3]$. Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30,30]^\circ \times [-50,50]^\circ/\text{s}$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq [50, 100, 200, 100, 2]^\circ/\text{s}$. As funções de base utilizadas foram: $f_1 = 1$, $f_2 = \cos(\tilde{q}_3)$, $f_3 = \cos(\dot{\tilde{q}}_3)$, $g_1 = 1$, $g_2 = \cos(\tilde{q}_3)$ e $g_3 = \cos(\dot{\tilde{q}}_3)$.

O valor de atenuação mínimo encontrado, para $L = 5$ e 2 iterações $X-N$, foi $\gamma = 1,8$. As posições inicial e final consideradas foram, respectivamente, $q(0) = [0 \ 0 \ 0]^{\circ}$ e $q(T_c, T_a) = [20 \ 20 \ 20]^{\circ}$. Os resultados simulados: posição angular, velocidade angular e torque aplicado, com $T^1 = [1 \ 1]s$ e $T^2 = [5,0 \ 5,0]s$, são mostrados nas Figuras 2, 3 e 4, respectivamente.

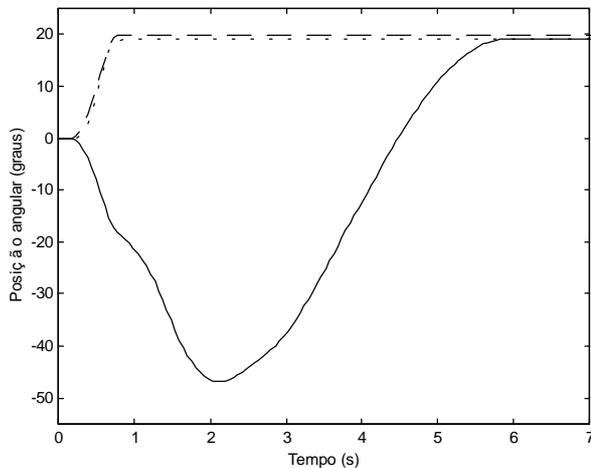


Figura 2 – Posição angular das juntas.

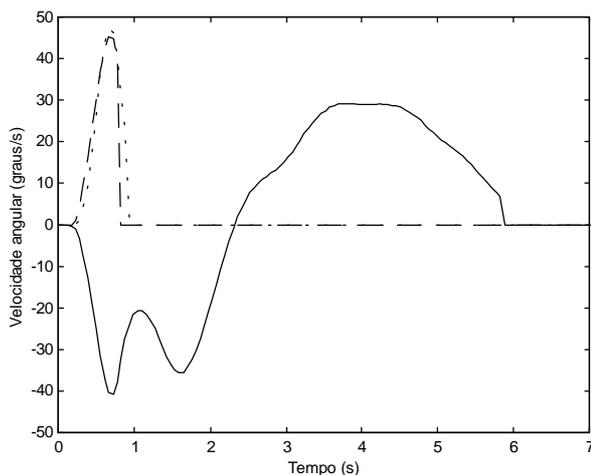


Figura 3 – Velocidade angular das juntas.

5 CONCLUSÃO

Verifica-se, a partir dos gráficos obtidos, que o controlador projetado utilizando uma representação quase-LPV para o robô experimental subatuado UArm II apresentou bom desempenho, ou seja, as juntas do manipulador alcançaram a posição final desejada no tempo estabelecido. Nota-se que as curvas de posição angular e velocidade angular apresentam um comportamento suave ao longo da trajetória, sendo esta uma característica desejada.

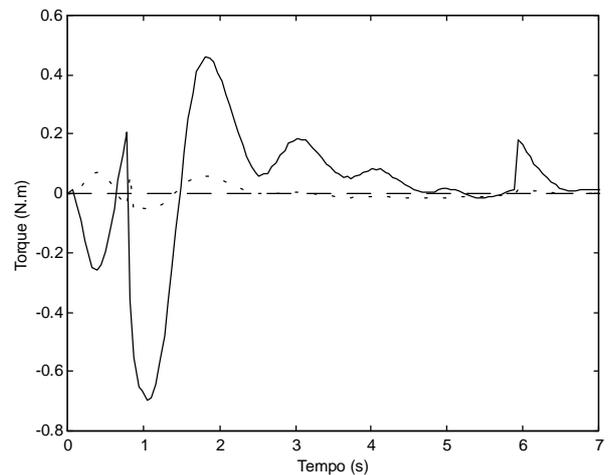


Figura 4 – Torque aplicado.

6 REFERÊNCIAS

- Arai, H. and Tachi, S. (1991) Position control of a manipulator with passive joints using dynamic coupling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 7, No. 4, pp. 528-534.
- Bergerman, M., (1996) "Dynamics and control of underactuated manipulators." Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA.
- Cloutier, J. R.; D'Souza, C. N. e Marcek, C. P. (1996) "Nonlinear regulation and nonlinear H_{∞} control via the state-dependent Riccati equation technique". *Proc. 1st International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, Daytona Beach, Florida, USA.
- Huang, Y. and Jadbabaie, A. (1998) "Nonlinear H_{∞} control: an enhanced quasi-LPV Approach". Workshop in H_{∞} nonlinear control by J. C. Doyle, Caltech, *Conference on Decision and Control - CDC98*.
- Terra, M. H.; Siqueira, A. A. G. and Bergerman, M. (1999) "Underactuated manipulator robot control via linear matrix inequalities". *Conference on Decision and Control-CDC 99 - Phoenix, Arizona, USA*.
- van der Schaft, A. J. (1992) L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_{∞} control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 770-784.
- Wu, F. and Yang, X. H.; Packard, A. and Becker, G. (1996) "Induced L_2 -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates". *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, pp. 983-998.
- Agradecimento: Este trabalho conta com apoio da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), proc. n. 00/00388-9.