

CONTROLE H_∞ NÃO LINEAR DE ROBÔS MANIPULADORES VIA REPRESENTAÇÃO QUASE-LPV

Adriano A. G. Siqueira Marco Henrique Terra

Departamento de Engenharia Elétrica
EESC - Universidade de São Paulo
São Carlos, SP, Brasil
{siqueira, terra}@sel.eesc.sc.usp.br

Resumo O controle H_∞ aplicado a sistemas não lineares consiste em garantir que o ganho L_2 entre o distúrbio e a saída do sistema seja limitado por um nível de atenuação γ . Esta garantia será alcançada se soluções para equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi existirem, cuja obtenção pode ser de considerável complexidade. Um procedimento alternativo consiste em caracterizar o problema em termos de desigualdades matriciais lineares. Para tal, o sistema não linear deve ser representado como um sistema quase linear com parâmetros variantes (quase-LPV). Neste trabalho, esta técnica é aplicada a um robô manipulador experimental planar com três links.

Abstract: H_∞ control applied to nonlinear systems consists in to guarantee that the L_2 between the disturbance and the output be bounded by a attenuation level γ . This guaranty will be reached if there are solutions to the partial differential Hamilton-Jacobi equations, whose obtainment can be of considerable complexity. A alternative procedure is to characterize the problem in terms of linear matrix inequalities. For this, the nonlinear system have to be represented as a quasi-linear parameter varying system (quasi-LPV). In this work, this technique is applied in a experimental robot manipulator with three links.

Keywords: nonlinear H_∞ control, quasi-LPV systems, linear matrix inequalities.

1 INTRODUÇÃO

Um importante objetivo em síntese de sistemas de controle para robôs manipuladores é projetar controladores que atenuem os efeitos de distúrbios externos e incertezas paramétricas. Um dos mais populares procedimentos para obter este objetivo é o controle H_∞ , no qual a relação entre as normas induzidas L_2 dos sinais de entrada (distúrbios) e saída é limitada por um nível de atenuação γ . A generalização do controle H_∞ para sistemas não lineares invariantes no tempo foi primeiramente apresentada por (van der Schaft, 1992). Basicamente, as condições necessárias e suficientes para que o problema de controle H_∞ tenha solução consistem em resolver equações (inequações) de Hamilton-Jacobi.

Várias ferramentas foram desenvolvidas com o objetivo de obter soluções globais para as inequações de Hamilton-Jacobi (van der Schaft, 1992). Entretanto, não há algoritmos eficientes para resolver tais inequações para sistemas com grande número de estados. Um procedimento alternativo com propriedades computacionais interessantes é proposto em (Lu and Doyle, 1995). Baseado na possibilidade do problema de controle H_∞ linear ser caracterizado como um problema convexo, ou seja, utilizando-se desigualdades matriciais lineares (DML), os autores analisaram a convexidade do problema de controle H_∞ não linear e caracterizaram as soluções em termos de desigualdades matriciais não lineares, sendo na realidade DMLs dependentes do estado.

Por outro lado, as técnicas desenvolvidas para sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) (Apkarian and Adams, 1998; Wu et all, 1996) fornecem controladores dependentes dos parâmetros, também chamados de ganhos escalonados,

satisfazendo a condição de ganho L_2 menor que γ . A inclusão do conhecimento da taxa de variação dos parâmetros na síntese dos controladores deve satisfazer um conjunto de DMLs (Wu et all, 1996). Quando aplicado em sistemas não lineares, os parâmetros variantes são funções do estado ao invés de variáveis “livres”. Esta representação de um sistema não linear é denominada quase-LPV (quase linear com parâmetros variantes). Em (Cloutier et all, 1996), diferentes representações lineares de um mesmo sistema não linear apresentaram desempenhos diferentes. Com o objetivo de eliminar este comportamento, em (Huang and Jadbabaie, 1998) foi proposto incorporar esta liberdade de escolha da representação quase-LPV no processo de construção do controlador.

Assim, em (Huang and Jadbabaie, 1998), uma condição de DML de dimensão infinita é derivada englobando todas as representações lineares da dinâmica não linear. Infelizmente o problema de síntese de realimentação do estado é não convexo em ambas as variáveis de projeto, sendo visto como um problema de desigualdade matricial bilinear (DMB) de dimensão infinita, não havendo garantia de encontrar um ótimo global. Entretanto, analogamente à iteração $D-K$ para síntese μ , um algoritmo iterativo é desenvolvido para encontrar o melhor desempenho possível. Para resolver o conjunto de DMLs gerado por este algoritmo, procedimentos computacionais utilizando-se bases de funções e divisão do espaço de parâmetros foram desenvolvidos em (Wu et all, 1996).

O controle de robôs manipuladores tem sido o objetivo de um grande número de pesquisas (Apkarian and Adams, 1998; Chen et all, 1994; Terra et all, 1999). A dificuldade de controlar as coordenadas generalizadas de um manipulador com o objetivo de seguir uma trajetória desejada pode ser de considerável grandeza se incertezas paramétricas e distúrbios externos estiverem presentes.

Uma aplicação da técnica LPV em um manipulador flexível é apresentada em (Apkarian and Adams, 1998). A solução para o caso de realimentação da saída é encontrada utilizando-se as mesmas ferramentas desenvolvidas em (Wu et al, 1996): escolha de bases de funções e divisão do espaço dos parâmetros. Entretanto, não há na literatura referência à implementação de técnica semelhante em robôs reais.

Na seção 2, são apresentados o problema de controle H_∞ por realimentação do estado para sistemas LPV com taxa de variação dos parâmetros limitada (Wu et al, 1996), a extensão para sistemas quase-LPV (Huang and Jadbabaie, 1998) e os procedimentos computacionais para solução das DMLs dependentes dos parâmetros (estados) (Wu et al, 1996). A representação quase-LPV de um robô manipulador é derivada na seção 3. Os resultados experimentais obtidos pela aplicação desta técnica no robô manipulador UArm II são apresentados na seção 4.

2 CONTROLE H_∞ NÃO LINEAR

Nesta seção, o procedimento de projeto do controlador H_∞ por realimentação do estado será descrito para sistemas LPV e quase-LPV. Utilizar-se-á a seguinte notação: \mathfrak{R}^+ é o conjunto de números reais não negativos, $C^1(\mathfrak{R}^m, \mathfrak{R}^n)$ é o conjunto de funções continuamente diferenciáveis que fazem o mapeamento de \mathfrak{R}^m para \mathfrak{R}^n , e S é o conjunto de matrizes simétricas. A norma euclidiana de um vetor é denotada por $\|\cdot\|$, ou seja, $\|z\|^2 = z^T z$ para $z \in \mathfrak{R}^k$. A notação L_2 será utilizada para sinais com energia limitada, ou seja, $L_2(0, T) = \left\{ w : \int_0^T \|w(t)\|^2 dt < \infty \right\}$.

2.1 Síntese do Controle H_∞ para Sistemas LPV via Realimentação do Estado

Considere o problema de síntese do controle via realimentação do estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_1(\rho(t)) & B_2(\rho(t)) \\ C_1(\rho(t)) & 0 & 0 \\ C_2(\rho(t)) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

sendo $w \in \mathfrak{R}^p$ o distúrbio, $z = [z_1 \ z_2]^T \in \mathfrak{R}^q$ variáveis de saída e $x \in \mathfrak{R}^n$ as variáveis de estados. Os parâmetros ρ variam dentro do conjunto:

$$F_P^v := \{ \rho \in C^1(\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}^m) : \rho(t) \in P, |\dot{\rho}_i| \leq v_i, i = 1, \dots, m \} \quad (2.2)$$

sendo $P \subset \mathfrak{R}^m$ um conjunto compacto, e $v = [v_1 \ \dots \ v_m]^T$ com $v_i \geq 0$.

O objetivo é encontrar uma função contínua $F(\rho)$ tal que o sistema em malha fechada possua ganho L_2 menor que γ com lei de realimentação de estados igual a $u(t) = F(\rho(t))x(t)$.

Lema 2.1. (Wu et al, 1996) Se existe uma função matricial contínua diferenciável $X(\rho) > 0$ para todo $\rho \in P$ que satisfaz

$$\begin{bmatrix} E(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.3)$$

sendo

$$E(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm v_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho)^T - B_2(\rho)B_2^T(\rho)$$

e $\hat{A}(\rho) = A(\rho) - B_2(\rho)C_2(\rho)$, então, com lei de realimentação do estado

$$u(t) = -(B_2(\rho(t))X^{-1}(\rho(t)) + C_2(\rho(t)))x(t)$$

o sistema em malha fechada possui ganho $L_2 \leq \gamma$ para toda trajetória paramétrica $\rho(t) \in F_P^v$.

O resultado acima é uma generalização natural da teoria de H_∞ linear para plantas lineares com parâmetros variantes. Ao invés de uma função de Lyapunov quadrática para a planta linear invariante no tempo, uma função de Lyapunov paramétrica $V(x,t) = x^T(t)X^{-1}(\rho(t))x(t)$ é assumida. Note que, na realidade (2.3) representa 2^m inequações, pois o termo $\sum \pm (\bullet)$ indica que toda combinação $+(\bullet)$ e $-(\bullet)$ deve ser satisfeita.

2.2 Modelo Quase-LPV para Sistemas Não Lineares com Entradas Afins

Tratando as dinâmicas não lineares como sistemas lineares dependentes do estado, pode-se aplicar a técnica LPV para uma classe de sistemas não lineares. Baseado na observação que o modelo quase-LPV não é unicamente determinado pelas dinâmicas não lineares, em (Huang and Jadbabaie, 1998) foi proposto incorporar esta liberdade de escolha da representação quase-LPV no problema de otimização. Primeiramente, é estabelecida a parametrização de todas as representações lineares dependentes do estado de algumas dinâmicas não lineares com entradas afins.

Lema 2.2. (Huang and Jadbabaie, 1998) Suponha uma função $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ continuamente diferenciável com $f(0) = 0$. Então, uma função contínua matricial estimada $A_0(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$ pode sempre ser encontrada tal que $f(x) = A_0(x)x$. Além disso, todas as possíveis funções $A(x)$ satisfazendo $f(x) = A(x)x$ podem ser parametrizadas como

$$A(x) = A_0(x) + N(x)$$

sendo que $N: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$ satisfaz $N(x)x = 0$.

Note que $A(x)$ no lema acima não é uma linearização de $f(x)$. De fato, temos um número infinito de possíveis representações matriciais $A(x)$ para uma dada $f(x)$. Portanto, uma dinâmica não linear dada por

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)w$$

pode ser transformada para

$$\dot{x} = A(x)x + g(x)w,$$

que se assemelha a um sistema linear, mas com matrizes de estado dependentes das variáveis de estado ao invés de serem constantes como no caso linear. Para manter o número de parâmetros variantes a um mínimo, a dependência das matrizes de estado $A(x)$ e $g(x)$ nas variáveis de estado será mudada para $\rho(x) \in C^1(\mathcal{X}^n, \mathcal{R}^m)$ com $m \leq n$, isto é, $A(x)$ e $g(x)$ tornam-se $A(\rho(x))$ e $g(\rho(x))$ respectivamente. Por enquanto, $\rho(x)$ pode simplesmente representar parte das variáveis de estado.

A seguinte representação quase-LPV do sistema não linear com entradas afins será usada para o problema de síntese do controlador:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(x)) & B_1(\rho(x)) & B_2(\rho(x)) \\ C_1(\rho(x)) & 0 & 0 \\ C_2(\rho(x)) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Esta representação é diferente do verdadeiro modelo LPV (2.1), apenas pelo fato que os parâmetros ρ_i 's são agora funções das variáveis de estado, isto é, $\rho = \rho(x)$. Visando atenuar os efeitos das entradas exógenas para todas as trajetórias paramétricas permitidas, o tratamento LPV inevitavelmente introduzirá algum conservadorismo devido à conexão entre os parâmetros e as variáveis.

Como estabelecido no lema 2.2, tem-se um número infinito de escolhas na construção do modelo quase-LPV para dinâmicas não lineares. Na próxima seção, será proposto um meio sistemático para gerar uma escolha original de $A(x)$ que pode resultar no melhor desempenho.

2.3 Síntese do Controle H_∞ para Sistemas Quase-LPV via Realimentação do Estado: Iteração X – N

Considere o modelo quase-LPV (2.4). Assume-se que o parâmetro ρ varie no conjunto permissível F_p^v (2.2).

Teorema 2.1. (Huang and Jadbabaie, 1998) Se for possível encontrar uma $X(\rho(x)) > 0$ e uma $N(\rho(x))$ com $N(\rho(x))x = 0$ que satisfaçam as seguintes desigualdades matriciais:

$$\begin{bmatrix} E^*(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.5)$$

sendo

$$E^*(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm v_i(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_i} - B_2(\rho)B_2^T(\rho) +$$

$$(\hat{A}(\rho) + N(\rho))X(\rho) + X(\rho)(\hat{A}(\rho) + N(\rho))^T$$

e $\hat{A}(\rho) = A(\rho) - B_2(\rho)C_2(\rho)$ para todo $\rho \in P$, então o sistema em malha fechada possui ganho $L_2 \leq \gamma$ sujeito a lei de realimentação do estado:

$$u(x) = -(B_2(\rho(x))X^{-1}(\rho(x)) + C_2(\rho(x)))x.$$

Comparado com o resultado do LPV padrão estabelecido no lema 2.1, uma nova função matricial estimada $N(\rho(x))$ é acrescentada para compensar a não unicidade do modelo quase-LPV devido às dinâmicas não lineares. O melhor nível γ associado com uma particular $A(\rho)$ pelo lema 2.1 serve como um limite superior do melhor ganho L_2 possível do sistema não linear em malha fechada.

Note que a equação (2.5) não é afim em $X(\rho)$ e $N(\rho)$. Para um valor de ρ , (2.5) é uma DMB em X e N . A minimização de γ para ambas X e N nesta DMB é um problema não convexo, entretanto, quando X ou N é fixada e tenta-se minimizar γ para a outra, este se torna um problema convexo. Analogamente à iteração “D - K” para síntese μ , uma iteração “X - N” é proposta como um esquema prático para encontrar o melhor desempenho:

1. Encontre uma representação quase-LPV (2.4) para o sistema não linear em malha aberta.
2. Escolha os parâmetros variantes ρ , os limites do parâmetro P e a taxa de variação limite v .
3. Calcule o melhor nível γ possível para o modelo quase-LPV (lema 2.1). Se o desempenho é satisfatório, pare.
4. Relaxe γ lentamente, resolva (2.3) para uma $X(\rho) > 0$ factível.
5. Calcule o melhor γ sobre toda $N(\rho)$ com $X(\rho)$ fixada do passo anterior (teorema 2.1). Se o novo γ é satisfatório ou não se alterou, pare.
6. Relaxe γ lentamente, resolva (2.5) com $X(\rho)$ do passo 4 para uma $N(\rho)$ factível.
7. Substitua $A(\rho)$ por $A(\rho) + N(\rho)$. Retorne ao passo 3.

Note que esta estratégia não é garantia de convergência para um ótimo global porque este problema não é convexo para ambas X e N . Nos passos 5 e 6, a DMB (2.5) é reduzida para uma DML em $N(\rho)$ desde que $X(\rho)$ é mantida fixa. Selecionando um conjunto de funções de base para $N(\rho)$ que satisfaçam $N(\rho(x))x = 0$, pode-se encontrar uma solução aproximada para (2.5) resolvendo a DML.

2.4 Considerações Computacionais

Um esquema computacional prático (Huang and Jadbabaie, 1998; Wu et al, 1996) pode ser utilizado para resolver as DMLs presentes nos problemas LPV e quase-LPV. Por simplicidade, considere o problema de encontrar $X(\rho)$ na equação (2.3). Primeiro, escolha um conjunto de funções C^1 , $\{f_i(\rho)\}_{i=1}^M$, como base para $X(\rho)$, ou seja,

$$X(\rho) = \sum_{i=1}^M f_i(\rho)X_i \quad (2.6)$$

sendo $X_i \in S^{n \times n}$ a matriz coeficiente para $f_i(\rho)$. Se $X(\rho)$ em (2.3) é substituído por (2.6), o vínculo (2.6) são DMLs em termos das variáveis matriciais $\{X_i\}_{i=1}^M$ quando o parâmetro ρ é fixado.

Para resolver este problema de otimização de dimensão infinita, divide-se o conjunto de parâmetros P em L pontos $\{\rho_k\}_{k=1}^L$ em cada dimensão. Então calcula-se as DMLs acima para estes pontos. Desde que (2.3) consiste de 2^m vínculos, um total de $(2^m+1)L^m$ desigualdades matriciais afins em termos das M variáveis matriciais $\{X_i\}$ devem ser resolvidas. Uma aproximação da densidade de pontos particionados que garantem uma solução global das DMLs é dado em (Wu et al, 1996).

Para a equação (2.5), deve-se escolher um conjunto de funções $C^1, \{g_i(\rho)\}_{i=1}^M$, como base para $N(\rho)$, lembrando que a condição $N(\rho)x = 0$ deve ser satisfeita para todo ρ . Por exemplo, se o vetor de estado do sistema é da forma $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ então uma possível forma para a matriz $N(\rho)$ é dada por:

$$N(\rho) = \sum_{i=1}^M g_i(\rho) N_i \begin{bmatrix} -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}.$$

Este esquema computacional possui algumas limitações. O número de parâmetros considerados e o número de divisões L devem ser escolhidos tal que a solução seja alcançada em um número de iterações realizáveis. Outro problema é a falta de justificativas teóricas na escolha das funções de base para $X(\rho)$ e $N(\rho)$. Geralmente, escolhem-se funções similares às encontradas nas matrizes de estado $A(\rho)$ (Apkarian and Adams, 1998).

3 ROBÔS MANIPULADORES

Nesta seção, a equação em espaço de estados do erro de acompanhamento de um robô manipulador é derivada, sendo os distúrbios derivados de incertezas paramétricas e perturbações externas na entrada. A equação dinâmica de um robô perturbado pode ser formulada pela Teoria de Lagrange como:

$$\tau + \delta = M_0(q)\ddot{q} + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + F_0(\dot{q}) + G_0(q) \quad (3.2)$$

com

$$\delta = -(\Delta M(q)\ddot{q} + \Delta C(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta F(\dot{q}) + \Delta G(q) - w)$$

sendo $q \in \mathfrak{R}^n$ as posições angulares das juntas, $M_0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia (simétrica e positiva definida) nominal, $C_0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ a matriz de Coriolis nominal, $F_0 \in \mathfrak{R}^n$ os torques de fricção nominais, $G_0 \in \mathfrak{R}$ os torques gravitacionais nominais e $\tau \in \mathfrak{R}^n$ os torques aplicados. As matrizes ΔM ΔC ΔF ΔG são as incertezas paramétricas relacionadas às matrizes M , C , F e G , respectivamente. Os distúrbios externos estão incluídos no vetor w .

O erro de acompanhamento do estado é definido como:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}^d \\ q - q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

sendo q^d e $\dot{q}^d \in \mathfrak{R}^n$ a trajetória de referência desejada e sua correspondente velocidade, respectivamente. Assume-se que as variáveis q^d , \dot{q}^d e \ddot{q}^d , a aceleração desejada, satisfazem os limites físicos e cinemáticos do objetivo de controle. A equação dinâmica para o erro de acompanhamento do estado é encontrada utilizando (3.2) e (3.3)

$$\dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x})\tilde{x} + Bu + B\delta \quad (3.4)$$

com

$$A(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} -M_0^{-1}(q)C_0(q, \dot{q}) & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = M_0^{-1}(\tau - M_0\ddot{q}^d - C_0(q, \dot{q})\dot{q}^d - F_0(\dot{q}) - G_0(q)).$$

Embora a matriz M_0 dependa explicitamente das posições, pode-se considerá-la como função do erro de acompanhamento de posição e do tempo. Tal afirmação pode ser visualizada pela seguinte observação:

$$M_0(q) = M_0(\tilde{q} + q^d) = M_0(\tilde{x}).$$

O mesmo pode ser observado para C_0 . Portanto, a equação (3.4) pode ser considerada uma representação quase-LPV para o robô manipulador, ou seja, com $A(\tilde{x})$. Nota-se que esta representação foi gerada naturalmente a partir de um sistema não linear escolhendo-se a matriz C_0 . Existem várias possibilidades de se escolher a matriz C_0 , entretanto, a mais utilizada é a que faz com que a matriz $N(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q}) + (1/2)\dot{M}_0(q, \dot{q})$ seja anti-simétrica.

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O algoritmo de projeto proposto na seção 2.3 como solução do problema H_∞ para sistemas quase-LPV via realimentação do estado foi aplicado ao robô manipulador experimental planar de três links UArm II (Figura 1).



Figura 1 - UArm II.

As matrizes M , C e G da equação (3.1) são encontradas facilmente pela teoria de Lagrange para um manipulador planar. Entretanto, o termo F é determinado de acordo com o tipo de atrito de fricção atuando no robô. Neste trabalho, um termo de fricção dependente da velocidade é utilizado:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \dot{q}_1 \\ f_2 \dot{q}_2 \\ f_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

sendo os valores f_1 , f_2 e f_3 escolhidos após testes empíricos. Os parâmetros nominais cinemáticos e dinâmicos do manipulador utilizados para calcular as matrizes nominais M_0 , C_0 , F_0 e G_0 são mostrados na Tabela 1.

Junta	M_i (kg)	I_i (kg.m ²)	l_i (m)	lc_i (m)	f_i (kg.m ² /s)
1	0,850	0,0075	0,203	0,096	0,28
2	0,850	0,0075	0,203	0,096	0,18
3	0,625	0,0060	0,203	0,077	0,10

Tabela 1. Parâmetros do robô

Os parâmetros massa, centro de massa e inércia foram calculados a partir das medidas dos componentes (rotor, estator, sistema de freio, fios) dos ligamentos, obtidas pelos construtores do robô. Observa-se que o robô foi adquirido com suas partes montadas, não sendo possível realizar novas medidas para conferir as dimensões dos ligamentos separadamente.

Para aplicar o algoritmo descrito na seção 2.3, o sistema robô manipulador deve ser representado pela equação (2.4). Escolhe-se como parâmetros os estados representando os erros de posição das juntas 2 e 3, ou seja,

$$\rho(\tilde{x}) = [\tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3]$$

sendo \tilde{q}_2 e \tilde{q}_3 os erros de posição das juntas 2 e 3, respectivamente. Esta escolha é baseada no fato que a matriz de inércia, M , e a matriz de Coriolis, C , são funções da posição das juntas 2 e 3, e como visto anteriormente, são dependentes do erro de posição destas juntas. A matriz C também é

dependente das velocidades angulares das juntas 1, 2 e 3. Entretanto, uma escolha de ρ que também considere os erros de velocidade das juntas, ou seja, ρ contendo 5 elementos, faz com que número de DMLs a serem resolvidas cresça absurdamente.

Considera-se como saídas do sistema, z_1 e z_2 , os erros de posição e velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente. Portanto o sistema pode ser descrito pela equação (2.4) com:

$$A(\rho(x)) = A(\rho(\tilde{x}))$$

$$B_1(\rho(x)) = B$$

$$B_2(\rho(x)) = B$$

$$C_1(\rho(x)) = I_n$$

$$\text{e } C_2(\rho(x)) = 0.$$

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30,30]^\circ \times [-30,30]^\circ$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq 50^\circ/\text{s}$. Como foi visto anteriormente, uma alternativa para a escolha das funções utilizadas como base para $X(\rho)$ e $N(\rho)$, consiste em utilizar funções contidas nas matrizes de estado. A função trigonométrica *coseno* está presente nas matrizes M e C que compõem a matriz de estado A , e portanto, as funções escolhidas foram:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = \cos(\tilde{q}_2)$$

$$f_3 = \cos(\tilde{q}_3)$$

e

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = \cos(\tilde{q}_2)$$

$$g_3 = \cos(\tilde{q}_3)$$

As matrizes $X(\rho)$ e $N(\rho)$, quando representadas nesta base são dadas por:

$$X(\rho) = \sum_{i=1}^3 f_i(\rho) X_i$$

e

$$N(\rho) = \sum_{i=1}^3 g_i(\rho) N_i \begin{bmatrix} -\tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}$$

Verifica-se que a matriz $N(\rho)$ satisfaz a condição $N(\rho)x = 0$. O espaço dos parâmetros foi dividido em 5 pontos, ou seja $L = 5$. Utilizando-se a expressão gerada na seção 2.7 com $m = 2$, obtém-se que 125 LMIs devem ser resolvidas para as variáveis X_i e N_i . Para resolver este problema foi utilizado o *toolbox LMI* do MatLab. O valor de atenuação mínimo encontrado, realizando-se 2 iterações $X-N$, foi $\gamma = 1,2$.

O experimento foi realizado para posição inicial $q(0) = [0, 0, 0]^\circ$ e posição final desejada $q(T) = [-20, 30, -30]^\circ$, sendo que o vetor $T = [T_1 \ T_2 \ T_3]$ contém os tempos de duração da trajetória de referência para cada junta. Este vetor é adequadamente escolhido levando em conta a diferença entre a posição inicial e a posição final de cada junta. A trajetória de

referência, q^d , é um polinômio de quinto grau. Os resultados simulados: posição angular, velocidade angular e torque aplicado, para a configuração AAA, com $T = [3,4 \ 4,0 \ 4,0]$, são mostrados nas Figuras 2, 3 e 4, respectivamente. Nas figuras, a linha sólida representa a junta 1, a linha traço-ponto a junta 2 e a linha pontilhada a junta 3.

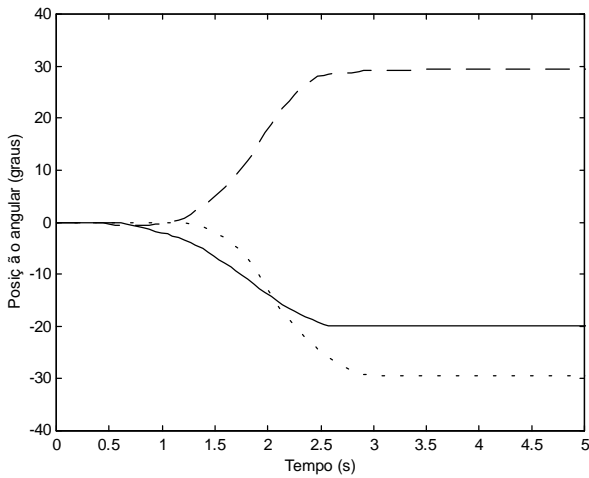


Figura 2 – Posição angular das juntas.

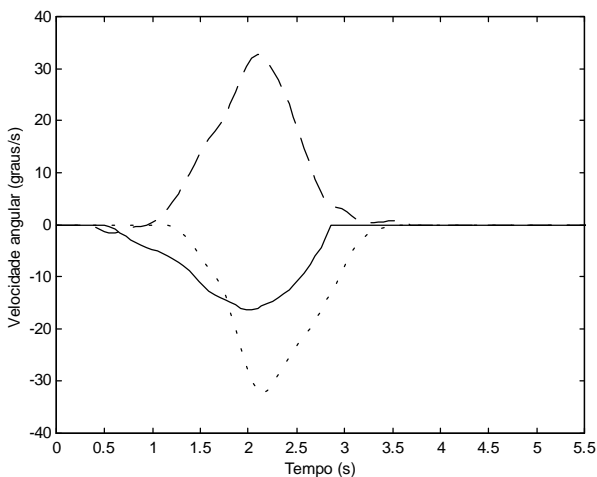


Figura 3 – Velocidade angular das juntas.

5 CONCLUSÃO

Verifica-se, a partir dos gráficos obtidos, que o controlador projetado utilizando uma representação quase-LPV para o robô experimental UArm II apresentou bom desempenho, ou seja, as juntas do manipulador alcançaram a posição final desejada no tempo estabelecido. Nota-se que as curvas de posição angular e velocidade angular apresentam um comportamento suave ao longo da trajetória, sendo esta uma característica desejada. A aplicação desta técnica em robôs manipuladores subatuados vem sendo desenvolvida pelos autores e será apresentada em trabalhos futuros.

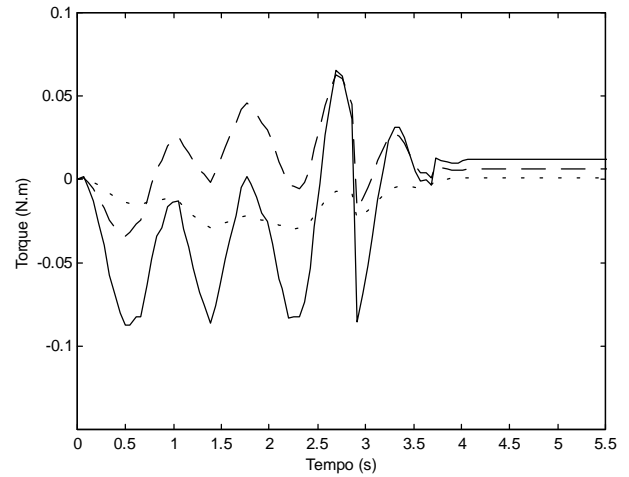


Figura 4 – Torque aplicado.

6 REFERÊNCIAS

- Apkarian, P. and Adams, R. J. (1998) Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 6, No. 1, pp. 21-32.
- Chen, B. S.; Lee T. S. and Feng, J. H. (1994) "A nonlinear H_∞ control design in robotic systems under parameter perturbation and external disturbance". *International Journal of Control*, Vol. 59, No. 2, pp. 439-461.
- Cloutier, J. R.; D'Souza, C. N. e Marcek, C. P. (1996) "Nonlinear regulation and nonlinear H_∞ control via the state-dependent Riccati equation technique". *Proc. 1st International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, Daytona Beach, Florida, USA.
- Huang, Y. and Jadbabaie, A. (1998) "Nonlinear H_∞ Control: An Enhanced Quasi-LPV Approach". Workshop in H_∞ nonlinear control by J. C. Doyle, Caltech, *Conference on Decision and Control - CDC98*.
- Lu, W. M. and Doyle, J. C. (1995) H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 9, pp. 1668 - 1675.
- Terra, M. H.; Siqueira, A. A. G. and Bergerman, M. (1999) "Underactuated Manipulator Robot Control via Linear Matrix Inequalities". *Conference on Decision and Control-CDC 99 - Phoenix, Arizona, USA*.
- van der Schaft, A. J. (1992) L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 770-784.
- Wu, F. and Yang, X. H.; Packard, A. and Becker, G. (1996) "Induced L_2 -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates". *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, pp. 983-998.

Agradecimento: Este trabalho conta com apoio da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), proc. n. 00/00388-9.