BURACOS NEGROS ESTACIONÁRIOS

Patricia Velozo M. da Silva[1], *Roberto Baginski Batista Santos*[2]
[1] *Departamento de Engenharia Química, Centro Universitário FEI*
[2] *Departamento de Física, Centro Universitário FEI*
paty_veeloso@hotmail.com, rsantos@fei.edu.br

Resumo: O objetivo deste trabalho é descrever a geometria e a física de buracos negros estacionários e de simetria esférica usando as ideias e o formalismo da relatividade geral.

1. Introdução

A relatividade geral é a teoria física que lida com as consequências do princípio da equivalência de Einstein [1] usando transformações generalizadas de coordenadas da forma $x' = f(x)$ em que x e x' são vetores de um espaço-tempo de quatro dimensões (uma temporal e três espaciais) que representam as coordenadas que descrevem eventos no espaço-tempo e $f(x)$ é uma transformação inversível [1].

As transformações de coordenadas aceitáveis incluem mudanças de coordenadas entre sistemas que se movimentam aceleradamente entre si e são equivalentes a descrever o movimento de um corpo em uma geometria curva, que é o espaço-tempo curvo da relatividade geral [1-3].

O princípio da equivalência afirma que, localmente, os efeitos de um campo gravitacional sobre o movimento são indistinguíveis dos efeitos de usar um sistema de referência acelerado na ausência de um campo gravitacional para descrever o movimento.

O princípio da equivalência permite descrever os fenômenos gravitacionais como se fossem a descrição de movimento em relação a sistemas de referência acelerados ou em um espaço-tempo curvo [1].

Esta interpretação permite afirmar que a presença de matéria ou de energia curva o espaço-tempo no qual os objetos se movem [1].

2. Metodologia

Estudamos os elementos básicos da relatividade geral para compreender a geometria de um buraco negro [1-3]. Começamos com vetores e tensores definidos a partir de transformações de coordenadas entre sistemas acelerados e avançamos pela geometria dos espaços curvos até chegar nas equações de Einstein que descrevem a gravidade na relatividade geral.

Vetores e tensores são elementos básicos da relatividade geral. Um vetor V é um objeto cujos componentes V^μ se comportam, sob a transformação de coordenadas entre x e x', da seguinte forma:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \qquad 1$$

Um tensor T é um objeto cujos componentes se transformam como

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma} \qquad 2$$

Na relatividade geral, a generalização da noção de distância é o intervalo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad 3$$

que é invariante sob transformações de coordenadas. Os componentes $g_{\mu\nu}$ do tensor métrico são

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} \qquad 4$$

e

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 5$$

é o tensor métrico do espaço-tempo plano da relatividade especial [2-3].

A métrica define a geometria do espaço-tempo curvo no qual os corpos se movem. O tensor métrico é uma generalização do potencial gravitacional da teoria da gravitação de Newton para a relatividade geral de Einstein [1].

A linha de universo de um objeto é o lugar geométrico dos pontos quadridimensionais ocupados pelo objeto durante seu movimento [2,3]. Na relatividade geral, a linha de universo é sempre uma curva geodésica, que é a generalização da linha reta para um espaço-tempo curvo. Curvas geodésicas são as soluções da equação da geodésica

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad 6$$

em que $d\tau = \sqrt{-ds^2}/c$ é o tempo próprio do objeto e a conexão afim ou símbolos de Christoffel [1-3] são

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma}\left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}\right) \qquad 7$$

A conexão afim é a ligação entre a geometria descrita pelo tensor métrico e a física do movimento dos corpos, descrita pela linha de universo.

Portanto, a conexão afim é uma generalização do campo gravitacional da teoria da gravitação de Newton para a relatividade geral de Einstein [1].

Certas operações que são simples de executar em uma geometria plana se tornam mais complexas em uma geometria curva. A comparação entre vetores pertencentes a espaços tangentes a pontos distintos de uma superfície curva é uma destas operações.

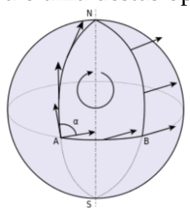

Figura 1. Transporte de um vetor ao longo de um caminho fechado em uma superfície curva.

A figura 1 ilustra o resultado do transporte de um vetor ao longo de um caminho fechado em uma superfície curva. Pode-se ver que a orientação do vetor sofre alteração após percorrer o caminho fechado ANBA, o que dificulta a comparação entre vetores pertencentes a espaços tangentes diferentes associados a uma superfície curva.

A alteração da orientação do vetor depende da área envolvida pelo caminho fechado e da curvatura da superfície. Há várias maneiras de caracterizar a curvatura de uma superfície. Na relatividade geral, as três medidas mais usadas são o tensor de Riemann [1-3]

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \partial_\kappa \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \qquad 8$$

o tensor de Ricci [1-3]

$$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} \qquad 9$$

e o escalar de curvatura [1-3]

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \qquad 10$$

O tensor de Einstein [1-3]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}/2 \qquad 11$$

é uma medida adicional de curvatura muito útil porque se relaciona com o tensor energia-momento por meio das equações de Einstein [1-3]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}/c^4 \qquad 12$$

em que G é a constante gravitacional.

O tensor energia-momento contém informação sobre as densidades de energia e de momento linear, sobre o fluxo de momento linear, sobre as tensões de cisalhamento e sobre a pressão.

As equações de Einstein dizem que o tensor energia-momento é o gerador da curvatura do espaço-tempo [1].

Depois que se descobriu que a taxa de expansão do Universo aumentava com o tempo, as equações de Einstein foram modificadas para [3]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}/c^4 \qquad 13$$

incorporando o termo da constante cosmológica $\Lambda > 0$.

3. Resultados

Para compreender um buraco negro, é preciso determinar a métrica gerada por uma massa M estacionária, esfericamente simétrica e isolada, isto é, a massa está limitada a uma região finita do espaço. Usando coordenadas esféricas, a métrica é dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad 14$$

em que $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)$ é a parte angular da métrica, $f(r)$ e $h(r)$ são duas funções que dependem apenas da coordenada radial r. A simetria da situação permite reduzir o problema de determinar dez componentes independentes do tensor métrico à determinação de apenas duas funções. No exterior da região que contém a massa, $T_{\mu\nu} = 0$, fazendo as equações de Einstein se tornarem

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad 15$$

pois $R = 0$ neste caso. Após determinar os símbolos de Christoffel necessários, a equação (15) se torna

$$\begin{cases} 4h'f^2 - 2rf''hf + rh'f'f + rf'^2h = 0 \\ rh'f + 2h^2f - 2hf - rf'h = 0 \\ -2rf''hf + rh'f'f + rf'^2h - 4f'hf = 0 \end{cases} \qquad 16$$

cuja solução é

$$h(r) = \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} \qquad f(r) = K\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \qquad 17$$

As constantes r_S e K são determinadas usando a aproximação de campo fraco em que

$$g_{tt} \approx -c^2\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \qquad 18$$

onde $\Phi = -GM/r$ é o potencial gravitacional newtoniano que é válido quando o campo gravitacional é fraco. Obtemos

$$K = -c^2 \qquad r_S = \frac{2GM}{c^2} \qquad 18$$

e r_S é chamado raio de Schwarzschild, que delimita o horizonte de eventos do buraco negro.

Analisando a métrica obtida, vemos que ela descreve um espaço-tempo plano para $r \gg r_S$ e que os componentes g_{tt} e g_{rr} do tensor métrico trocam de sinal quando a coordenada radial r atravessa r_S.

Isto significa que um corpo que se aproxima muito da massa M $(r < r_S)$ não poderá mais se afastar, isto é, ao cruzar o horizonte de eventos em $r = r_S$, o cone do futuro do associado ao corpo aponta necessariamente para a singularidade em $r = 0$, como mostra a figura 2, o que justifica o nome buraco negro para este tipo de objeto.

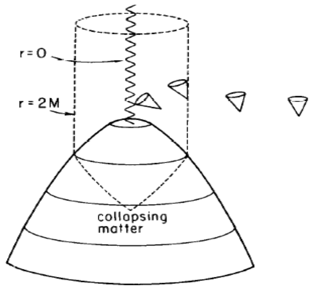

Figura 2. Representação de um buraco negro mostrando o cone do futuro de um corpo apontando para a singularidade no centro do buraco negro após atravessar o horizonte de eventos. Fonte: ref. [2].

Uma singularidade é uma região do espaço-tempo em que o escalar de curvatura R se torna infinito. No caso do buraco negro, $R = 0$ no horizonte de eventos, o que mostra que não existe uma singularidade nesta região, mas $R \longrightarrow \infty$ em $r = 0$, o que mostra a existência de uma singularidade no centro do buraco negro.

4. Conclusões

Fizemos uma revisão bibliográfica da relatividade geral e usamos as equações de Einstein sem constante cosmológica para obter a métrica de Schwarzschild que descreve a geometria de um buraco negro estacionário e esfericamente simétrico. Nas próximas etapas, vamos obter a métrica de um buraco negro usando as equações de Einstein com constante cosmológica positiva, que é a versão aceita atualmente.

5. Referências

[1] A. Einstein, Relativity, Methuen, 1920.
[2] R. M. Wald, General Relativity, University of Chicago Press, 1984.
[3] J. B. Hartle, Gravity, Addison-Wesley, 2003.

Agradecimentos

Ao Centro Universitário FEI pela concessão da bolsa de iniciação científica.

[1] Aluna de IC do Centro Universitário FEI. Projeto com vigência de 03/2018 a 02/2019.