SISTEMAS DINÂMICOS EM DIMENSÃO 1- FAMÍLIA QUADRÁTICA

Monica Marques Nacimento[1]*, Tiago Estrela de Oliveira,*
[1,2] *Departamento de Matemática, FEI*
monicamnacimento@gmail.com, e tiagoestrela@gmail.com

Resumo **-** Este trabalho tem como objetivo o estudo de Sistemas Dinâmicos em dimensão um, tendo como ênfase a família quadrática. O estudo buscou avaliar a estabilidade de pontos de equilíbrio em função dos parâmetros que envolvem a dinâmica e suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento. Todas as programações foram realizadas nos ambientes de software MATLAB e GEOGEBRA.

1. Introdução

O grande avanço do estudo de sistemas dinâmicos na atualidade se dá pela ampla possibilidade de uso de ferramentas computacionais.

Um sistema dinâmico consiste em um conjunto de possíveis estados, que determinam o estado presente em função de outros estados passados. Isto é, um sistema onde as variáveis descritivas variam com o tempo.

Estes sistemas têm ampla aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento como na biologia, onde este tipo de sistema é essencial para compreensão de cadeias alimentares , unificação da genética e na seleção natural, uma vez que para essas análises faz-se necessário um conhecimento sobre esta dinâmica não-linear de interação entre as espécies. Na física quando busca-se compreender movimentação de estrelas e galáxias, na matemática para o estudo das oscilações da bolsa de valores e outros aspectos diversos.

Estes sistemas podem apresentar situações perfeitamente previsíveis, porém grande variedade deles apresentam um comportamento altamente complexo e imprevisível, ao qual nomeamos como caóticos.

2. Família Quadrática

O estudo da família quadrática ganhou grande importância a partir da pesquisa sobre crescimento populacional, feita por Robert May em 1976. Também conhecida como mapa logístico, esta família é expressa matematicamente por :

$$X_{n+1} = \mu x_n (1-x_n) \qquad (1)$$

Alterar parâmetros de um sistema dinâmico, μ no caso da equação logística, equivale, na prática, a construir vários sistemas dinâmicos diferentes, que obedecem a mesma relação matemática entre suas variáveis.

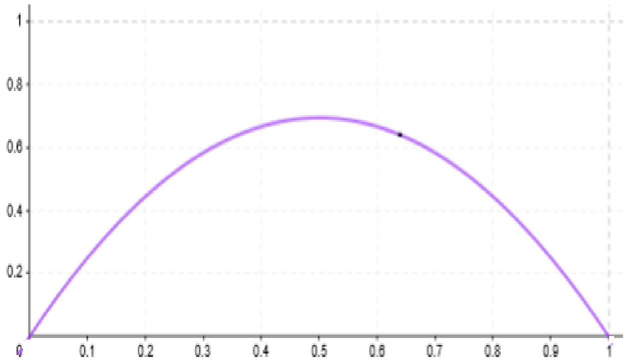

Figura 1- Representação gráfica do mapa logístico.

Tendo em vista que o parâmetro μ está no intervalo $0 \leq \mu \leq 4$, e $x_0 \in [0,1]$, a partir deste modelo, é possível estabelecer mapas logísticos para diferentes valores de parâmetro, e, portanto, com dinâmicas distintas, como é demostrado nas figuras abaixo:

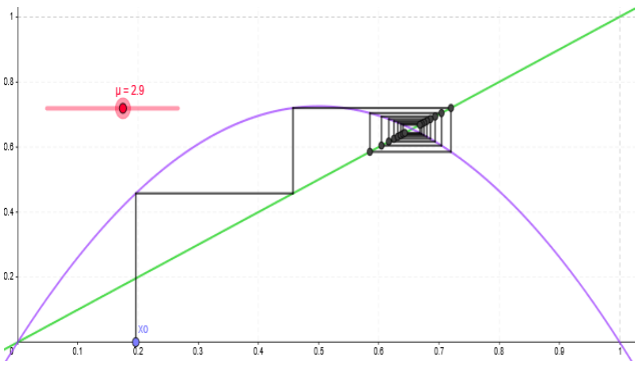

Figura 1- Representação gráfica do mapa logístico para $x_0 = 0.2$ e $\mu = 2.9$.

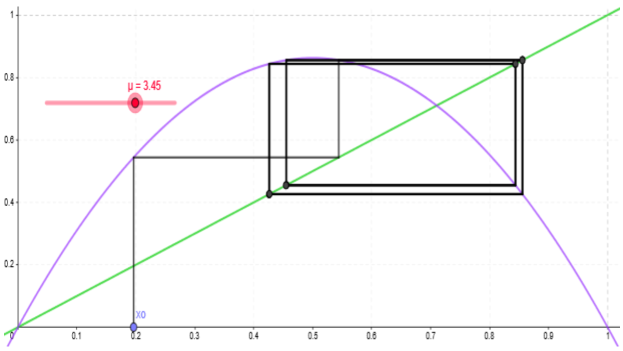

Figura 2- Representação gráfica do mapa logístico para $x_0 = 0.2$ e $\mu = 3.45$.

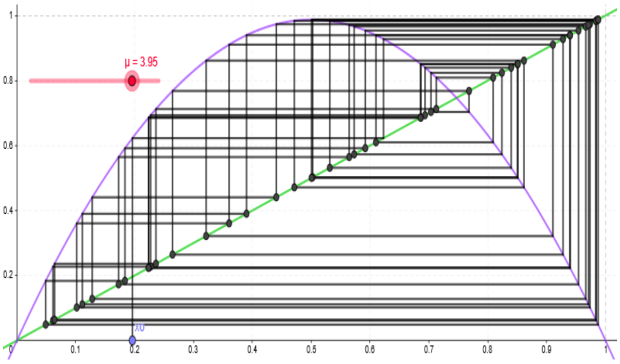

Figura 3- Representação gráfica do mapa logístico para x_0= 0.2 e μ= 3.9.

Na figura 2 é visto que o cobweb, nome dado a esta representação, evolui para um ponto fixo, como esperado. Já na figura 3 observa-se um retângulo de cobweb, o que ilustra um comportamento periódico. Finalmente, na figura 4 observa-se que o comportamento do cobweb ocupa grande parte do gráfico e tem uma conduta desordenado, caótica , uma vez que o sistema assume diversos valores.

Por outro lado, se μ > 4, existe uma parte do intervalo que se escapa do mesmo e a sua iteração converge para $-\infty$. No entanto, existe ainda a parte que não se escapa, esta é o conjunto de Cantor, sendo este o conjunto de pontos que se mantém em [0,1] para sempre.

3. Expoente de Lyapounov

O expoente de Lyapounov é usado para a caracterização da evolução de um sistema dinâmico. Este expoente oferece uma medida quantitativa para o comportamento caótico, que se caracteriza por uma grande sensibilidade a condições iniciais.

No caso do mapa logístico, o expoente de Lyapounov é definido matemáticamente por:

$$\lambda \approx \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_n^N \ln|\mu(1-2x_{n+1})| \qquad (2)$$

Com base no valor deste parâmetro é possível descrever o comportamento que será encontrado em um determinado sistema.

λ	Comportamento
λ<0	A órbita é atraída para um ponto estável, fixo ou periódico.
λ=0	Ocorre uma bifurcação no ponto.
λ>0	As órbitas vão divergir arbitráriamente. O sistema é considerado caótico ou instável .

Figura 4- Comportamento do sistema com a variação de λ.

4. Conclusão

A análise de sistemas dinâmicos detém grande importância no entendimento do comportamento a longo prazo, de sistemas presentes, que possuem evolução dada por uma regra determinística, ou seja, conhecemos em qualquer instante as equações que regem o sistema partindo de certas condições iniciais.

O crescimento deste estudo se deu pela "facilidade" com a qual o mesmo busca descrever e solucionar problemas altamente complexos, que envolvem inúmers variáveis.

5. Referências

[1] Monteiro, Luís Henrique Alves. Sistemas Dinâmicos , São Paulo, 2 edição. Editora Livraria da Física, 2006.

[2] S. Lynch, Dynamical Systems with Applications using MATLAB, Birkhauser,2004.

[3] ABDENUR, Flávio. Hiperbolicidade, Estabilidade e Caos em Dimensão Um. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2007. 59 f. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/26CBM_04.pdf>.

[4] A. T. Baraviera Flávia M. Branco, Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão. Instituto de Matemática-UFRGS, 61 f. Disponível em: <https://www.emis.de/journals/em/docs/coloquios/SU-2.02.pdf>.

[5] Robert L. Devaney, An introduction to chaotic dinamical systems Boulder : Westview Press, 2003.

Agradecimentos

À instituição Centro Universitário FEI pela realização das medidas ou empréstimo de equipamentos.

[1] Aluno de IC do Centro Universitário FEI . Projeto com vigência de 09/18 a 08/19.