

# ESTUDO MATEMÁTICO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS EM CÁLCULO ESTRUTURAL

Claudio Rodrigues Junior<sup>1</sup>, William Manjud Maluf Filho<sup>2</sup>  
<sup>1,2</sup> Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Universitário FEI  
[claudiorodriguesjr@uol.com.br](mailto:claudiorodriguesjr@uol.com.br), [wmlauf@fei.edu.br](mailto:wmlauf@fei.edu.br)

**Resumo:** Este trabalho tem a finalidade de estudar os fundamentos do método dos elementos finitos (MEF) e caracterizar os tipos de elementos finitos mais utilizados em cálculo estrutural a partir do estudo matemático da formulação e comportamento destes elementos. Outro objetivo complementar é identificar e descrever os parâmetros que definem o nível de qualidade da malha de elementos finitos, que influencia diretamente na qualidade das respostas das simulações computacionais.

## 1. Introdução

O método dos elementos finitos (MEF) é um método aproximado de cálculo de sistemas contínuos e está associado com a discretização destes sistemas em sub-regiões ou subdomínios denominados elementos finitos, que por sua vez estão conectados entre si por intermédio de pontos discretos, que são chamados de nós [1].

A figura 1 ilustra o princípio da discretização aplicado no método dos elementos finitos (MEF).

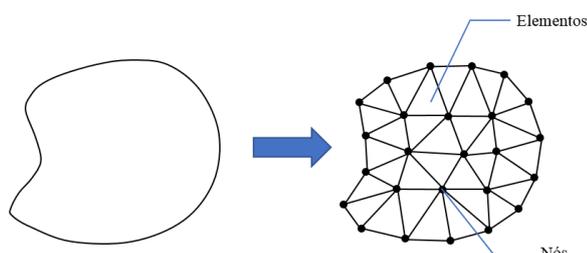


Figura 1 – Discretização de um corpo contínuo pelo método dos elementos finitos.

O método dos elementos finitos (MEF) tem mostrado ser uma ferramenta muito poderosa quanto a resolução de problemas complexos em que as soluções analíticas exatas são muito difíceis de serem obtidas [2].

O domínio desta tecnologia proporciona às empresas a diminuição do tempo e taxa de erros no desenvolvimento de projetos e redução de custos. Em contraste, é capaz de aumentar a confiabilidade e qualidade dos serviços de engenharia [3].

A figura 2 mostra o exemplo de uma malha de elementos finitos utilizada para analisar a estrutura de um semirreboque de caminhão.

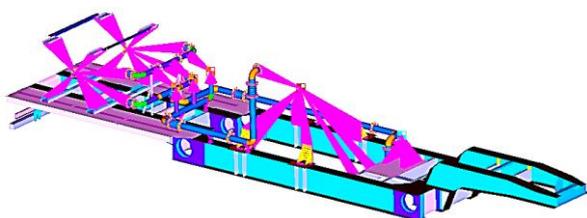


Figura 2 – Exemplo de malha em um semirreboque.

A figura 3 mostra o exemplo de uma malha de elementos finitos utilizada para analisar a estrutura de um transformador de grande porte.

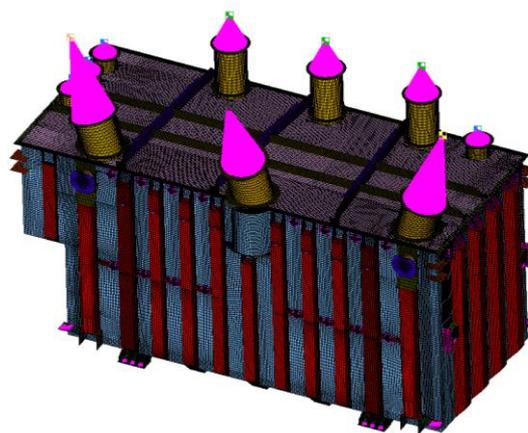


Figura 3 – Exemplo de malha em um transformador.

É importante fazer uma avaliação muito criteriosa do comportamento e formato dos tipos de elementos finitos a serem utilizados para que as respostas da análise sejam confiáveis e com bom custo benefício entre tempo de processamento e qualidade de resultados, uma vez que quanto maior a quantidade de elementos, maior será a quantidade de nós e consequentemente maior será o tempo de processamento necessário para que o software efetue os cálculos necessários [4].

## 2. Metodologia

Inicialmente realizou-se uma revisão histórica sobre o surgimento e desenvolvimento do método dos elementos finitos (MEF) e sobre os programas tradicionais que são comumente aplicados no estudo de problemas de engenharia mecânica estrutural nas fases de pré-processamento, pós-processamento e *solving*.

Posteriormente executou-se uma revisão técnica a respeito dos conceitos fundamentais relativos à teoria da elasticidade, mecânica dos sólidos e elementos finitos, incluindo a formulação geral do método para os casos que envolvem análise estática linear.

Por fim, estudou-se a formulação dos elementos finitos mais utilizados em cálculo estrutural, incluindo elementos 0D, 1D, 2D e 3D.

Adicionalmente, foi feito o detalhamento de alguns dos parâmetros que definem a qualidade da malha de elementos finitos e quais valores que estes podem assumir na construção de um modelo numérico. Neste trabalho, foram abordados: *skew*, *internal angles*, *aspect ratio*, *warpage*, *jacobian*.

A tabela I mostra os tipos de elementos finitos estudados neste trabalho de pesquisa.

Tabela I – Tipos de elementos estudados.

| Elemento  | Classificação |
|-----------|---------------|
| Massa     | 0D            |
| Mola      | 1D            |
| Treliça   | 1D            |
| Torção    | 1D            |
| Viga      | 1D            |
| RBE2      | 1D            |
| RBE3      | 1D            |
| Placa     | 2D            |
| Casca     | 2D            |
| Tetraedro | 3D            |
| Hexaedro  | 3D            |

### 3. Resultados

Ao estudar a formulação geral do método dos elementos finitos (MEF) chega-se as equações (1) e (2):

$$[M].\{U''\}+[K].\{U\}=\{P\}-\{Q\}+\{F_x\}+\{F_\phi\} \quad (1)$$

$$[M].\{U''\}+[C].\{U'\}+[K].\{U\}=\{P\}-\{Q\}+\{F_x\}+\{F_\phi\} \quad (2)$$

Para o caso particular de análises do tipo estática, verifica-se a seguinte relação matemática representada pela equação (3):

$$\{F\}=[K].\{U\} \quad (3)$$

Para o caso particular de análises do tipo modal, verifica-se as seguintes relações matemáticas representadas pelas equações (4) e (5):

$$[M].\{U''\}+[K].\{U\}=\{0\} \quad (4)$$

$$[M].\{U''\}+[C].\{U'\}+[K].\{U\}=\{0\} \quad (5)$$

Para o caso particular de análises do tipo dinâmica, verifica-se a seguinte relação matemática representada pela equação (6):

$$[M].\{U''\}+[C].\{U'\}+[K].\{U\}=\{F(t)\} \quad (6)$$

Para as análises do tipo estática linear, as deformações podem ser calculadas pela equação (7):

$$\{\epsilon\}=[L].\{u\}=[L].[N].\{U\}=[B].\{U\} \quad (7)$$

Para as análises do tipo estática linear, as tensões podem ser calculadas pela equação (8):

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D].\{\epsilon\} - \alpha.\Delta T.[Dt] \\ \{\sigma\} &= [D].[B].\{U\} - \alpha.\Delta T.[Dt] \end{aligned} \quad (8)$$

Onde:

[M] – Matriz de massa

[K] – Matriz de rigidez

{U} – Vetor de deslocamentos nodais

{U'} – Vetor de velocidades nodais

{U''} – Vetor de acelerações nodais

{P} – Vetor de forças nodais concentradas

{Q} – Vetor de forças nodais térmicas equivalentes

{F<sub>x</sub>} – Vetor de forças nodais de corpo

{F<sub>φ</sub>} – Vetor de forças nodais de superfície

[C] – Matriz de amortecimento

{F(t)} – Vetor de forças nodais em função do tempo

{u} – Vetor de deslocamentos do sistema contínuo

[N] – Matriz de funções de forma

[L] – Matriz de operadores diferenciais

[B] – Matriz de conversão das deformações

[D] – Matriz de elasticidade mecânica

[Dt] – Matriz de elasticidade térmica

{ε} – Vetor de deformações elásticas

{σ} – Vetor de tensões elásticas

α – Coeficiente de dilatação térmica

ΔT – Variação de temperatura

### 4. Conclusões

Para aplicar corretamente o método dos elementos finitos (MEF) na solução de problemas da mecânica estrutural, é imprescindível conhecer os fundamentos teóricos em que se baseia esta metodologia de análise.

É extremamente importante não apenas conhecer os principais elementos utilizados na solução de problemas envolvendo estruturas, mas também conhecer o comportamento que cada elemento pode assumir para que a seleção dos elementos durante o processo de discretização da estrutura seja adequada. Assim será possível captar os fenômenos físicos envolvidos no problema de modo a representar a realidade.

Conhecer os parâmetros que definem a qualidade da malha de elementos finitos e entender como ocorre o cálculo das deformações e tensões dentro do elemento também se mostrou essencial, pois a partir disso é possível avaliar como a função de interpolação dos deslocamentos nodais, o refino e a qualidade da malha podem influenciar nos resultados.

### 5. Referências

- [1] FILHO, A. A. **Elementos finitos – A base da tecnologia CAE: Análise matricial**. 6. ed. São Paulo: Érica, 2014.
- [2] COOK, R., et al. **Concepts and applications of finite element Analysis**. 4 ed. Estados Unidos: John Wiley, 2002.
- [3] ZIENKIEWICZ, O.C, TAYLOR, R.L. **The finite element method: The basis**. 5 ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. v.1.
- [4] BITTENCOURT, M. L. **Análise computacional de estruturas: Com aplicação do método dos elementos finitos**. 1 ed. Campinas: UNICAMP, 2010.

### Agradecimentos

Ao Centro Universitário FEI pela bolsa PIBIC e fornecimento dos recursos para a realização da pesquisa. Ao Prof. Dr. William Maluf pela orientação e ensinamentos.

<sup>1</sup> Aluno de IC do Centro Universitário FEI. Projeto com vigência de 10/18 a 09/19.