

# VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE DE BELL EM UM COMPUTADOR QUÂNTICO

Lucas Longhini<sup>1</sup>, Roberto Baginski Batista Santos<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Universitário FEI

<sup>2</sup> Departamento de Física, Centro Universitário FEI  
lucas.ghini@gmail.com, rsantos@fei.edu.br

**Resumo:** O objetivo deste projeto é observar a violação experimental da desigualdade de Bell-CHSH usando um computador quântico de cinco qubits como aparato experimental. Os circuitos quânticos necessários para o experimento foram programados em Python e obtivemos  $S = 2,550 \pm 0,024$ , que representa uma violação da desigualdade de Bell-CHSH 22,9 vezes maior do que a incerteza experimental. Os resultados experimentais foram comparados com simulações de um processador quântico ideal no qual acrescentamos ruído na ação das portas quânticas e na medição e os resultados permitiram concluir que as probabilidades de erro na ação de uma porta quântica e na medição de um qubit são de 0,5% e de 2,0%, respectivamente.

## 1. Introdução

A desigualdade de Bell-CHSH é um teste realizado a partir da década de 1970 a fim de tentar distinguir experimentalmente se a natureza é descrita pela teoria quântica ou por uma teoria realista local. Em uma teoria realista local, as medições realizadas em um sistema físico possuem valores bem definidos em todos os instantes do tempo e estes valores não podem ser afetados por eventos que ocorram em uma região causalmente separada da região em que as medições estão sendo realizadas. A física quântica não é uma teoria realista local, ao contrário da física clássica e das teorias quânticas com variáveis ocultas<sup>[1]</sup>. A desigualdade de Bell-CHSH pode ser usada para verificar a integridade de chaves criptográficas quânticas.

Neste trabalho, exploramos conceitos como superposição de estados e emaranhamento quântico para testar a violação da desigualdade de Bell-CHSH em um computador quântico. O kit de desenvolvimento Qiskit foi usado para programar em Python o processador quântico de 5 qubits `ibmq_lima` disponibilizado para acesso em nuvem pela IBM Quantum.

## 2. Metodologia

As propostas iniciais<sup>[2,3]</sup> da desigualdade de Bell-CHSH envolvem um estado de Bell como

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VV\rangle + |HH\rangle) \quad (1)$$

que pode ser interpretado como um par de fótons preparados em um estado emaranhado, não clássico, de polarização em uma base vertical-horizontal. A grandeza

$$S = |E^{\alpha\beta} - E^{\alpha\beta'}| + |E^{\alpha'\beta} + E^{\alpha'\beta'}| \quad (2)$$

depende das correlações

$$E^{\alpha\beta} = P_{VV}^{\alpha\beta} + P_{HH}^{\alpha\beta} - P_{VH}^{\alpha\beta} - P_{HV}^{\alpha\beta} \quad (3)$$

entre as probabilidades de detecção de fótons em quatro bases diferentes definidas pelos conjuntos de ângulos  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, \beta')$ ,  $(\alpha', \beta)$  e  $(\alpha', \beta')$ . As probabilidades  $P_{AB}^{\alpha\beta}$  de detecção dos fótons em relação a uma base

caracterizada por ângulos  $(\alpha, \beta)$  em relação à base vertical-horizontal original são

$$\begin{cases} P_{VV}^{\alpha\beta} = |\langle V_\alpha V_\beta | \beta_{00} \rangle|^2 = \cos^2(\beta - \alpha)/2 \\ P_{VH}^{\alpha\beta} = |\langle V_\alpha H_\beta | \beta_{00} \rangle|^2 = \sin^2(\beta - \alpha)/2 \\ P_{HV}^{\alpha\beta} = |\langle H_\alpha V_\beta | \beta_{00} \rangle|^2 = \sin^2(\beta - \alpha)/2 \\ P_{HH}^{\alpha\beta} = |\langle H_\alpha H_\beta | \beta_{00} \rangle|^2 = \cos^2(\beta - \alpha)/2 \end{cases} \quad (4)$$

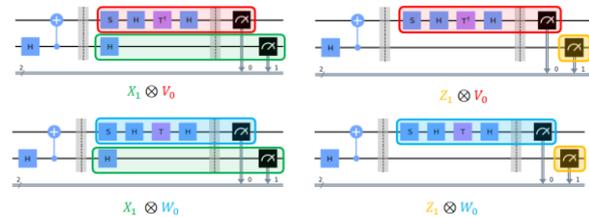
e isso leva a

$$S = |\cos(2(\beta - \alpha)) - \cos(2(\beta' - \alpha))| + |\cos(2(\beta - \alpha')) + \cos(2(\beta' - \alpha'))|. \quad (5)$$

Teorias realistas locais preveem que  $S \leq 2$ , mas a física quântica prevê que  $S > 2$  para alguns valores do conjunto de ângulos  $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ .

Em um computador quântico, os estados de polarização  $|V\rangle$  e  $|H\rangle$  de um fóton podem ser representados pelos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  de um qubit e o experimento envolvendo medições em quatro bases de polarização é representado pelos quatro circuitos quânticos mostrados na figura 1.

Figura 1. Circuitos quânticos usados para teste da desigualdade de Bell-CHSH em um computador quântico.



Fonte: autoria própria.

Cada um dos circuitos é inicializado no estado  $|00\rangle$ ; em seguida é criado o estado de Bell  $|\beta_{00}\rangle$ . A partir daí, os circuitos implementam medições nas bases  $X \otimes V$ ,  $Z \otimes V$ ,  $X \otimes W$  e  $Z \otimes W$  que são equivalentes aos conjuntos  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, \beta')$ ,  $(\alpha', \beta)$  e  $(\alpha', \beta')$  para  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha' = 0$ ,  $\beta = 9\pi/8$  e  $\beta' = 7\pi/8$  para os quais a análise teórica da equação (5) prevê violação máxima da desigualdade de Bell-CHSH.

Como o computador quântico é capaz de medir apenas na base da porta  $Z$ , foi preciso sintetizar operadores de medição nas bases geradas pelas portas  $X$ ,  $V$  e  $W$ . A sintetização das portas de medição usa as identidades  $X = H^\dagger Z H$ ,  $V = (HT^\dagger HS)^\dagger Z (HT^\dagger HS)$  e  $W = (HTHS)^\dagger Z (HTHS)$ .

Em termos geométricos, medir em uma base diferente da base da porta  $Z$  é equivalente a aplicar uma rotação sobre os estados da base computacional  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  (transformação passiva). Na prática, o que fizemos foi aplicar ao estado a ser medido uma rotação no sentido oposto à rotação que precisaria ser aplicada aos estados da base computacional (transformação ativa).

Para mapear o comportamento de  $S$  em função do ângulo  $\theta$  entre as bases, a porta  $R_y(\theta)$  foi aplicada sobre o qubit  $q_1$  com  $\theta$  variando de 0 a  $2\pi$  em passos de  $\pi/8$ . Cada um dos quatro circuitos foi medido 10 000 vezes para cada um dos dezessete valores de  $\theta$  usados no experimento.

Para avaliar o efeito das imperfeições do computador quântico, foram realizadas simulações com o módulo Aer do pacote Qiskit, que fornece um simulador de um processador quântico ideal no qual introduzimos dois tipos de ruído: ruído na operação de cada porta quântica do circuito com probabilidade  $P_{gate1}$  e ruído na medição de cada qubit com probabilidade  $P_{meas}$ .

O ruído de medição consiste em um *bit-flip* causado pela porta  $X$  com probabilidade  $P_{meas}$ , isto é, um qubit que deveria apresentar valor 0 pode ser lido como 1 e vice-versa. Na operação de uma porta quântica do circuito, o ruído de porta inclui o *bit-flip*, que transformaria o estado  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  em  $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$ , e a possibilidade de um *phase-flip* com a inserção da porta  $Z$ . Neste caso, um qubit no estado  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  se tornaria  $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$  após a ação de um erro *phase-flip*.

Os resultados experimentais foram comparados com os resultados das simulações com ruído usando a raiz do erro quadrático médio (RMSE), dado por

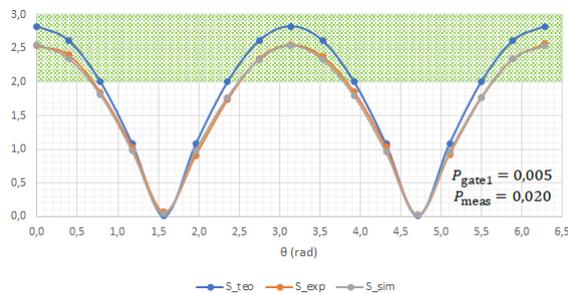
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum ((S_{exp}(\theta) - S_{sim}(\theta))^2)} \quad (6)$$

### 3. Resultados

A fidelidade observada no processo de criação do estado de Bell  $|\beta_{00}\rangle$  no processador quântico `ibmq_lima` foi  $\mathcal{F} = 0,9946$ , que é elevada o suficiente tendo em vista que o valor máximo da fidelidade é 1. Isso significa que o processador escolhido é capaz de criar o estado emaranhado necessário para a realização dos testes da desigualdade de Bell-CHSH.

A figura 2 mostra os resultados obtidos para a grandeza  $S$ . A curva  $S_{teo}$  foi construída a partir das probabilidades calculadas na equação (2).

Figura 2. Valores de  $S$  previstos ( $S_{teo}$ ), observados ( $S_{exp}$ ) e obtidos em uma simulação com ruído com probabilidades de erro  $P_{gate1} = 0,005$  e  $P_{meas} = 0,020$ .



Fonte: autoria própria.

Na região hachurada da figura,  $S > 2$  indicando que conseguimos observar violações experimentais da desigualdade de Bell-CHSH em um computador quântico. Como o valor máximo obtido foi  $S_{m\acute{a}x} = 2,550 \pm 0,024$ , observamos uma violação da desigualdade de Bell-CHSH 22,9 vezes maior do que a incerteza experimental.

Por outro lado, os valores experimentais  $S_{exp}$  estão sistematicamente abaixo dos valores teóricos, principalmente na região quântica em que  $S > 2$ , sendo a diferença entre os valores máximos 11,6 vezes maior do que a incerteza experimental.

Os valores  $S_{sim}$  obtidos em uma simulação com ruído sugerem que estas diferenças podem ser atribuídas aos efeitos do ruído no processador quântico. A tabela 1 apresenta um mapa de calor do RMSE entre os resultados experimentais e a simulação com diversos valores das probabilidades  $P_{gate1}$  e  $P_{meas}$  do modelo de ruído usado em passos de 0,005 (0,5%).

Tabela 1. Mapa de calor do RMSE entre os resultados experimentais e a simulação com ruído.

$P_{gate1}$	$P_{meas}$						
	0	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030
0	0,2083	0,1665	0,1265	0,0874	0,0597	0,0432	0,0564
0,005	0,1468	0,1089	0,0775	0,0468	<b>0,0403</b>	0,0705	0,1039
0,010	0,0925	0,0615	0,0509	0,0535	0,0800	0,1137	0,1474
0,015	0,0492	0,0493	0,0672	0,0992	0,1390	0,1705	0,2070
0,020	0,0571	0,0804	0,1100	0,1505	0,1755	0,2171	0,2438
0,025	0,0909	0,1300	0,1621	0,1980	0,2326	0,2630	0,3015
0,030	0,1471	0,1880	0,2195	0,2458	0,2787	0,3111	0,3392

O valor mínimo observado é  $RMSE_{min} = 0,0403$ , encontrado para a combinação de probabilidades  $P_{gate1} = 0,005$  (0,5%) e  $P_{meas} = 0,020$  (2,0%). Como a violação da desigualdade de Bell-CHSH é uma marca distintiva do comportamento quântico, este método poderia ser usado para avaliar os efeitos do ruído sobre um computador quântico.

### 4. Conclusões

Programamos o computador quântico `ibmq_lima` de cinco qubits e o usamos para observar uma violação da desigualdade de Bell-CHSH com  $S = 2,550 \pm 0,024$ , que é igual a 22,9 vezes a incerteza experimental. A diferença considerável entre os valores experimentais e a previsão teórica foi usada para avaliar, por meio de comparações entre os resultados experimentais e simulações, os efeitos do ruído sobre a medição (*bit-flip*) e sobre as portas quânticas dos circuitos usados (*bit-flip* e *phase-flip*). Usando a raiz do erro quadrático médio como métrica de avaliação, conseguimos estimar que a probabilidade de erro na ação de uma porta quântica é  $P_{gate1} = 0,005$  e que a probabilidade de erro na medição de um qubit é  $P_{meas} = 0,020$  neste processador quântico.

### 5. Referências

- [1] REDHEAD, M. Incompleteness, Nonlocality, and Realism. New York: Oxford University Press, 1989.
- [2] BELL, J.S. Physics v.1, p.195, 1964.
- [3] CLAUSER, J.F.; HORNE, M.A.; SHIMONY, A.; HOLT, R.A. Physical Review Letters v.23, p.880, 1969.

### Agradecimentos

Ao Centro Universitário FEI pela concessão da bolsa de iniciação científica.

<sup>1</sup> Aluno de IC do Centro Universitário FEI. Projeto com vigência de 08/2021 a 07/2022.