A MATEMÁTICA DAS VIBRAÇÕES MECÂNICAS

Victor Kawata dos Santos[1], Samir Assuena[2]
[1] Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Universitário FEI
[2] Departamento de Matemática, Centro Universitário FEI
unievictsantos@fei.edu.br e samir.assuena@fei.edu.br

Resumo: No presente artigo serão estudados alguns tópicos da matemática que estão presentes na área das Vibrações Mecânicas tais como séries numéricas, números complexos e as soluções numéricas e por séries de potências de equações diferenciais que serão contempladas com a explanação de algumas de suas aplicações neste estudo.

1. Introdução

As pessoas se interessaram por vibrações mecânicas quando os primeiros instrumentos musicais foram descobertos. Desde então, pessoas tem aplicado uma investigação crítica para estudar os fenômenos das vibrações. Embora certas regras muito definidas fossem observadas em relação à arte da música já na antiguidade, elas dificilmente poderiam ser consideradas uma ciência.

O filósofo e matemático grego Pitágoras (582-507 a.C.) é considerado o primeiro a investigar sons musicais com base científica. Entre outras coisas, Pitágoras realizou experimentos com uma corda vibratória utilizando um instrumento simples denominado *monocórdio* e observou que, se duas cordas iguais de comprimentos diferentes forem sujeitas à mesma tensão, a mais curta emite uma nota mais aguda. Todavia, Pitágoras não deixou nenhum registro escrito de seu trabalho.

No entanto, a primeira explicação correta publicada sobre a vibração das cordas foi dada pelo matemático francês Marin Mersenne (1588-1648) em seu livro *Harmonicorum liber*, publicado em 1636. Mersenne é considerado por muitos o pai da acústica.

Sir Isaac Newton (1642-1727) publicou sua obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* em 1686, na qual descreveu a lei da gravitação universal, bem como as três leis do movimento. A segunda lei do movimento de Newton é usada rotineiramente em livros modernos de vibrações para derivar as equações de movimento de um corpo em vibração. A solução teórica do problema da corda vibratória foi descoberta pelo matemático inglês Brook Taylor (1685-1731) em 1713, que também apresentou o famoso teorema de Taylor para séries infinitas. Este procedimento adotado por Taylor foi aperfeiçoado com a introdução de derivadas parciais nas equações de movimento por Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean D'Alembert (1717-1783) e Leonard Euler (1707-1783).

Entre os contribuintes modernos para a teoria de vibrações são notáveis os nomes de Stodola, Laval, Timoshenko e Mindlin.

2. Revisão Bibliográfica

2.1. Séries Numéricas de Fourier

As séries numéricas detêm uma grande importância no estudo da Engenharia Mecânica quando tratada por Vibrações Mecânicas. Através das séries, é possível extrair a função matemática capaz de descrever o comportamento de um sistema oscilatório.

O entendimento do que se tratam as séries numéricas vem da similaridade que este recurso tem com as sequências numéricas, que se difere apenas pelo fato de que todos os seus *n* componentes se somam [1].

Há um estudo completo em relação às séries numéricas, sejam elas geométricas, alternadas, harmônicas, séries de funções, entre outras. Entretanto o centro do presente estudo se dá através da visualização das Séries Numéricas de *Fourier*.

As séries numéricas de Fourier baseiam-se em um mecanismo de séries parecidas, as séries de Taylor e de Mac-Laurin. O princípio deste grupo de séries trata estudar uma função qualquer, seja ela uma função teórica simples, como as apresentadas nos cursos de cálculo, até funções experimentais, ou seja, aquelas funções que são obtidas em campo, e transformá-la em funções trigonométricas, com o único requisito de que essa função seja periódica de período 2π [2].

A metodologia das Séries de Fourier utiliza da função original para obter três coeficientes e adequando a uma série de formato padrão com tendência ao infinito, cabe a finalidade da aplicação a definição de quando truncar a série. Lembrando que quanto maior o termo onde se trunca a série, maior a precisão no resultado, entretanto, maior esforço computacional.

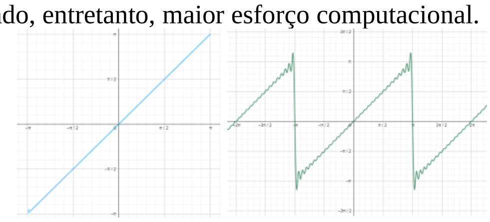

Figura 1 – Série de Fourier (direita) da função f(x) = x (esquerda) truncada em 30 termos.

No estudo experimental das vibrações, a dificuldade é encontrar a função original que descreve o sistema, com isso, uma ferramenta muito utilizada na engenharia é a Transformada Rápida de Fourier (FFT) que segue o mesmo princípio, de maneira inversa. Ela é capaz de tratar um sinal oscilatório qualquer e obter sua correspondência matemática.

2.2. Equações Diferenciais

O estudo das engenharias busca a implementação de sistemas que buscam sanar algum problema específico da aplicação. Um dos passos mais importantes neste caminho é a análise de resultados, o que nos leva a estudar as mais diversas variações que um sistema pode apresentar em seu resultado dependendo de alguns fatores de sua construção, é nesta etapa que entra a importância das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

Para todo sistema mecânico, existe uma equação diferencial que o descreve, e para obtê-la, utiliza-se da metodologia de construir um diagrama de corpo livre (DCL) do sistema, e aplicar a ele teoremas fundamentais que irão garantir a obtenção da EDO que o descreve [3], geralmente, a Segunda Lei de Newton se apresenta como ferramenta ideal para este fim.

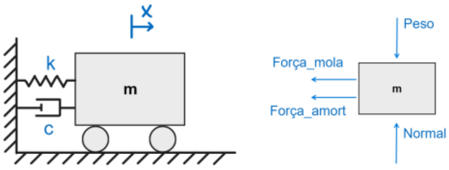

Figura 2 – Sistema Massa-Mola-Amortecedor (esquerda) e seu Diagrama de Corpo Livre (direita).

Utilizando a Segunda Lei de Newton – força resultante igual a massa multiplicada com a aceleração – as definições das forças da mola e do amortecedor dadas [3] por:

$$F_{mola} = kx(t) \tag{1}$$

$$F_{amort} = c\dot{x}(t) \tag{2}$$

Sendo k o coeficiente de rigidez (N/m), c o coeficiente de amortecimento (N.s/m), e x a variável que indica posição do sistema no decorrer do tempo.

$$-F_{mola} - F_{amort} = m\ddot{x}(t) \tag{3}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtém-se a equação diferencial que descreve o sistema.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{4}$$

Os resultados desta equação diferencial no tempo, dados seus valores constantes, resultam em todo o seu comportamento do sistema ao longo do tempo [3].

2.3 *Números Complexos*

O estudo dos números complexos é de certa forma muito enriquecedor para o estudo das Vibrações Mecânicas, uma vez que, através deles e de séries numéricas, mais especificamente as de Mac-Laurin, Leonhard Euler chegou ao resultado considerado um dos mais belos da matemática, a Identidade de Euler [4].

Euler decidiu expandir uma função exponencial através das séries de Mac-Laurin:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \tag{5}$$

Da equação (5), sabe-se que os termos real e imaginário são, respectivamente, as funções trigonométricas cosseno e seno, expandidas em séries numéricas.

$$e^{ix} = \cos(x) + i\ sen(x) \tag{6}$$

A expressão (6) é a chamada Identidade de Euler, que, ao substituir x=π, obtém-se a Fórmula de Euler.

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{7}$$

Esta relação é considerada por muitos uma das mais belas da Matemática, uma vez que, em uma mesma relação, temos quatro dos mais vislumbrantes números. O termo π é o número que é obtido através de uma relação de perímetro e diâmetro de uma circunferência, que contém infinitos números decimais, e até hoje existem estudos para determinar os dígitos desta dízima.

Outro valor importante é o número de Euler *e*, que é o número que se dá a base do logarítimo neperiano (ou natural), além disso, é o termo que, quando tratado em uma função, por exemplo e^x, tem por característica ser ou estar contido na sua derivada e sua primitiva, podemos caracterizá-lo como a identidade da derivação e integração.

Por fim, os últimos valores, 0 e 1 são dois números de certa forma simples, os quais conhecemos desde os primeiros anos de vida, entretanto, a importância dos mesmos é gigantesca, uma vez que, ambos os números são as identidades das operações básicas da matemática, sendo 0 a identidade para somas e subtrações, e 1 para multiplicações e divisões. Com isso, podemos finalizar o estudo da matemática das vibrações mecânicas apreciando esta relação.

4. Conclusões

O presente trabalho vislumbrou uma pequena parcela do mundo da matemática aplicada à Vibrações Mecânicas, explorando os conceitos de Séries, Números Complexos, Equações Diferenciais e outros minuciosos detalhes por entre todo o desenvolvimento do projeto. Através disso, podemos notar a grande participação da matemática nas vibrações mecânicas e na engenharia.

É certo afirmar que a matemática é uma ferramenta de grande valia para qualquer estudo. É interessante observar como os fatos se conectam para a construção dos conceitos de vibrações. É difícil crer que podemos transformar qualquer função periódica em uma função harmônica. O quão aprimorado fora a análise de Euler acerca das séries e números complexos. Assim como como as Leis de Newton são brilhantes a ponto de transformarem coisas simples em equações diferenciais que podem ser representadas no domínio do tempo.

Para desfecho de discussão, é correto afirmar que a matemática, não só das vibrações mecânicas, como também de todo o universo observável, e os estudos ligados a melhorias ou novas descobertas sempre devem ser alimentados.

Trabalhos futuros em relação a esta vertente podem ser realizados, buscando estudar mais relações matemáticas, como a Transformada de Laplace e suas aplicações, assim como a implementação das Séries de Fourier para análises experimentais.

5. Referências

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo, vol. 4. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015

[2] LORETO, Ana Célia da Costa; LORETO JUNIOR, Armando Pereira; PAGLIARDE, José Emílio. Cálculo 3. São Paulo: LTCE, 2012.

[3] KELLY, S. Graham. Vibrações Mecânicas: Teoria e Aplicações. São Paulo: Cengage, 2017.

[4] RICIERI, Aguinaldo Prandini. Assim Nasceu o Imaginário. São José dos Campos: Prandiano Comércio de Livros LTDA Edições Prandiano, 199.

Agradecimentos

À instituição Centro Universitário FEI pela realização das medidas / ou empréstimo de equipamentos / etc.

[1] Aluno de IC do Centro Universitário FEI. Projeto com vigência de 06/2022 a 05/2023.