

ANÁLISE DE DISCRIMINANTES LINEARES PARA MODELAGEM E RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE FACE

Edson C. Kitani e Carlos E. Thomaz

Departamento de Engenharia Elétrica – Centro Universitário da FEI
Av. Humberto de Alencar Castelo Branco, 3972, Assunção, CEP 09850-901
São Bernardo do Campo – SP – Brasil
{ekitani, cet}@fei.edu.br

Abstract. *Several pattern recognition approaches have used linear classifiers and the corresponding separating hyperplanes for classification tasks only. Few research studies have investigated the linear classifier's ability of not only separating two or more sample groups projected on a linear optimal basis but also capturing discriminant information. This work extends the use of a linear classifier by extracting and visualising the discriminant information captured by the classifier, as well as evaluating its generalisation ability given a training set composed of face images.*

Resumo. *Muitas abordagens que trabalham com classificadores lineares normalmente consideram o uso do hiperplano de separação apenas para fins de classificação. Poucos foram os trabalhos que estudaram a possibilidade de um classificador linear fornecer muito mais informações do que somente a base vetorial ótima que separa dois ou mais conjuntos distintos de observações. Este trabalho aborda uma extensão do uso de um classificador linear, explorando e visualizando as informações discriminantes que o classificador captura, bem como a sua capacidade de generalização e o potencial de predição da variabilidade contida em um conjunto de treinamento composto por imagens de faces.*

1. Introdução

O domínio das imagens de faces é uma área de pesquisa em visão computacional que tem motivado muitos pesquisadores dada a sua enorme abrangência e complexidade. Um aspecto importante ao se trabalhar com imagens de faces é o fato de que nós humanos já temos um conhecimento *a priori* que nos permite reconhecer faces, identificar pessoas, analisar expressões faciais, mesmo sob condições adversas, tais como; pouca iluminação, oclusão, ou mudanças provocadas pela idade. Portanto, trabalhar com imagens de faces pode ser útil para desenvolver e avaliar sistemas de reconhecimento e classificação de padrões, porque os resultados podem ser facilmente interpretados sem a necessidade de um julgamento especialista. Considera-se ainda que imagens de faces são visualmente complexas e contém várias características comuns aos problemas de reconhecimento de padrões em imagens como, por exemplo, o número limitado de amostras e alta dimensionalidade dos dados. Este trabalho discute como seria possível capturar as variações que estão contidas nas imagens de faces a partir de imagens discretas e como seria possível predizer os intervalos, determinar a característica mais discriminante e transferir essa característica para uma imagem de face.

O primeiro estudo sobre captura da variabilidade e síntese de imagens de faces foi proposto por [COOTES et al. 1998], onde a abordagem denominada *Active Appearance Model* (AAM) capturava, modelava e sintetizava as variações de face e expressões a partir de um conjunto de treinamento de imagens de faces previamente anotadas. Posteriormente em [EDWARDS et al. 1998] os autores extraíram informações discriminantes de um conjunto de treinamento e as transferiram para imagens de face. Em [BUCHALA et al. 2005] os autores investigaram que tipo de informação as autofaces [TURK & PENTLAND 1991] capturavam e como as informações sobre gênero, idade, etnia e identidade estavam distribuídas ao longo das autofaces. Este trabalho apresenta uma nova abordagem que combina os resultados obtidos por Cootes et al. 1998, Edwards et al. 1998 e Buchala et al. 2005 e é uma extensão da abordagem *Statistical Discriminant Model* (SDM) proposta inicialmente em [KITANI, THOMAZ, GILLIES 2006] que amplia a análise dos resultados apresentada por eles.

Na seção seguinte, seção 2, discute-se o modelo de representação de faces utilizado neste trabalho. Nas seções 3 e 4 descreve-se respectivamente os métodos de *Principal Componentes Analysis* (PCA) [JOLLIFE 2002] e *Linear Discriminant Analysis* (LDA) [BELHUMEUR et al. 1997], e uma nova abordagem proposta recentemente para regularização do LDA [THOMAZ, KITANI, GILLIES 2006]. Na seção 5 apresenta-se sucintamente a abordagem SDM utilizada neste trabalho e na seção 6 descreve-se os experimentos e os resultados obtidos. Finalmente, na seção 7, conclui-se este artigo.

2. Representação e interpretação de imagens de face

Assim como foi descrito no trabalho de [SIROVICH & KIRBY 1987], considera-se neste trabalho que a imagem de face média \bar{x} é um modelo de face. As variações em torno da média são as diferentes representações que o modelo pode trazer do mundo real e, no caso de faces, são as diferentes faces que variam em torno da média. Em termos matemáticos, a interpretação do modelo poderia ser compreendida como um classificador que pudesse extrair essas variações do nosso modelo. Diversos trabalhos na área de reconhecimento de faces apresentaram resultados com classificadores, porém apenas sob os aspectos para fins de classificação. Poucos foram os trabalhos que discutiram as transições que ocorrem dentro do modelo. Essas transições podem ser entendidas como um grau de generalização e interpretação que um classificador pode fornecer baseado nas informações aprendidas do conjunto de treinamento. A próxima seção resume as duas principais técnicas de estatística multivariada que foram utilizadas neste trabalho e introduz uma nova abordagem de análise de discriminantes lineares baseada no método de Fisher [BELHUMEUR et al 1997].

3 Análise de Componentes Principais (PCA)

Atualmente, considera-se a técnica PCA a mais antiga e bem sucedida técnica de estatística multivariada [JOLLIFE 2002]. Desde o pioneiro trabalho apresentado por [SIROVICH & KIRBY 1987] e posteriormente no trabalho desenvolvido por [TURK & PENTLAND 1991], a técnica PCA passou a ser amplamente utilizada pelos pesquisadores que trabalham com imagens de faces, seja para caracterizar e representar uma imagem de face ou suas partes mais significativas [LASCA & BORGES 2002], seja como um pré-processamento para fins de redução da dimensionalidade dos dados. Fundamentalmente, a maioria das aplicações tem utilizado o PCA somente para gerar um sub-espço vetorial computacionalmente manipulável, descartando-se as componentes principais que apresentam as menores variâncias de modo a minimizar o

erro de reconstrução. A essência do PCA é procurar uma base vetorial W que maximize a orientação na direção da máxima variância das amostras, como pode ser observado no equação (1) abaixo,

$$W_{opt} = \arg \max_w |W_{PCA}^T \Sigma W_{PCA}|, \quad (1)$$

onde W_{PCA} são os autovetores da matriz de covariância Σ do conjunto de amostras.

4. Análise de discriminantes lineares (LDA)

Quando se deseja apenas a redução efetiva ou mesmo a representação mais econômica dos dados que têm alta dimensionalidade, o PCA mostra-se adequado. Entretanto, sabe-se que não necessariamente a direção apontada pelos autovetores do PCA indica a melhor direção para fins de classificação. Baseado no mesmo princípio de se trabalhar com as projeções das amostras em uma base n -dimensional e determinar uma base vetorial que melhor discriminasse as amostras, foi proposto por Ronald A. Fisher um critério de maximização da separação entre duas ou mais classes de amostras que ficou conhecido como *Linear Discriminant Analysis* (LDA) [BELHUMEUR et al 1997]. A idéia básica é encontrar uma base vetorial W_{LDA} que maximize a razão entre o determinante da matriz inter-classe S_b e a matriz intra-classe S_w , ou seja,

$$Fisher_criterion = \max \frac{|S_b|}{|S_w|}. \quad (2)$$

Portanto, a determinação de uma base vetorial W_{opt} que maximize o critério de Fisher pode ser resolvida como um problema de autovetores e autovalores e pode ser determinada conforme a equação (3) a seguir,

$$(S_w^{-1} S_b) \Phi = \Lambda \Phi, \quad (3)$$

onde Φ é a matriz de autovetores e Λ a matriz de autovalores de $S_w^{-1} S_b$. Entretanto o problema da inversão da matriz S_w é bem conhecido por aqueles que trabalham com o LDA. Como no domínio de faces o número de características é sempre maior que o número de exemplos, a matriz S_w será singular provocando uma instabilidade na determinação da sua inversa. Em outras palavras, o LDA sofre com o problema do número pequeno de amostras do conjunto de treinamento (*Small Sample Size*) [FUKUNAGA 1990], e este é um problema muito conhecido por aqueles que trabalham com o LDA no domínio de faces [THOMAZ, KITANI, GILLIES 2006].

Vários autores propuseram métodos para superar a instabilidade da matriz S_w e os primeiros trabalhos sugerindo o uso de um sub-espço PCA foram propostos por [SWETS & WENG 1996] e posteriormente por [BELHUMER et al. 1997]. Entretanto, outros autores sugerem a regularização direta da matriz S_w sem necessariamente passar por um sub-espço PCA. O trabalho apresentado em [THOMAZ & GILLIES 2005] propõe a expansão dos autovalores que possuem os menores ou zero autovalores, e mantendo aqueles que já são maiores. Esta expansão mantém as maiores variâncias das amostras, pois quando se calcula os autovetores das matriz S_w no LDA clássico, observa-se que, em termos numéricos, os autovetores apresentam um desvio padrão próximo de zero, e conseqüentemente a magnitude do desvio em relação a média é muito pequena. Já esta expansão proposta por [THOMAZ & GILLIES 2005] baseia-se na hipótese de que se não há uma informação completa sobre a densidade de distribuição das amostras, pode-se determinar uma função densidade de probabilidade que maximize a entropia do sistema utilizando-se das informações das médias e das

matrizes de covariância S_w disponíveis nas amostras [THOMAZ, GILLIES, FEITOSA 2004]. Esta nova abordagem foi então denominada *Maximum uncertainty Linear Discriminant Analysis* (MLDA) [THOMAZ & GILLIES 2005], sendo o classificador linear utilizado neste trabalho.

5. Statistical Discriminant Model SDM

A abordagem SDM é essencialmente um classificador linear de dois estágios PCA+MLDA que promove a redução da dimensionalidade e a extração de características discriminantes de um conjunto de imagens. Entretanto, a abordagem SDM não procura necessariamente testar a capacidade de reconhecimento, classificação ou redução de dimensionalidade da abordagem combinada PCA+MLDA. O que procura-se investigar são quais as características que um classificador linear extrai de um conjunto de treinamento e como poderíamos interpretá-las visualmente [KITANI, THOMAZ, GILLIES 2006].

O SDM é utilizado para se capturar diferenças discriminantes entre dois ou mais conjuntos de treinamento. Em outras palavras, dados dois conjuntos formados, por exemplo, por faces sorrindo e não sorrindo de pessoas distintas, deseja-se capturar as variações provocadas pelo sorriso e não sorriso, e não necessariamente a diferença entre as distintas faces dos conjuntos de treinamento. Em [KITANI, THOMAZ, GILLIES 2006] foram apresentados os primeiros resultados da síntese de um imagem de face quando se navegava ao longo de um hiperplano discriminante, como aquele descrito na equação (4) a seguir,

$$x_i = \bar{x} + \Phi_{PCA}^T \Phi_{MLDA}^T y_i^{MLDA}, \quad (4)$$

onde Φ_{PCA} são os autovetores da base PCA, Φ_{MLDA} são os autovetores da base MLDA, \bar{x} é a face média e y_i^{MLDA} é o i -ésimo ponto projetado na espaço MLDA. Essa síntese visual reconstrói uma imagem de face que incorporou alguma característica considerada discriminante pelo MLDA. Assim, para cada face projetada no espaço MLDA, o espaço MLDA apenas reterá a informação que classifica cada imagem de face conforme as c classes definidas durante a fase de treinamento. A navegação na direção do autovetor que separa as duas classes e a síntese visual durante a navegação permitiriam a observação das características que foram capturadas para a classificação dos dois conjuntos de treinamento. Nesta fase o SDM permite visualizar as características discriminantes capturadas pelo classificador MLDA. Como descrito acima, a síntese visual apenas retorna as características discriminantes que foram capturadas, e não necessariamente a identidade de alguma face do conjunto de treinamento. A informação da identidade de cada face é atenuada durante a fase de cálculo do classificador, uma vez que a determinação do critério de Fisher considera a razão do $\det|S_b|$, que é a distância quadrática entre as médias das classes c , pelo $\det|S_w|$, que é a matriz de covariância das amostras de todas as classes c . Logo, não se consideram informações para fins de reconstrução, mas somente informações que são úteis para a classificação. Consequentemente, o espaço MLDA retém apenas as informações sobre a média de cada classe e as variações em torno de cada média. É relevante destacar que durante a fase de reconstrução das informações discriminantes, é possível reconstruir qualquer ponto y_k^{MLDA} do intervalo $y_i^{MLDA} < y_k^{MLDA} < y_{i+1}^{MLDA}$. Esta reconstrução é equivalente a uma interpolação linear da imagem da face média no espaço de alta dimensão. A próxima seção descreve os experimentos executados com o PCA e o SDM, bem como os respectivos resultados.

6. Experimentos com PCA e SDM

De modo análogo aos experimentos apresentados em [KITANI, THOMAZ, GILLIES 2006], utilizou-se um banco de faces criado e mantido no Departamento de Engenharia Elétrica da FEI¹ conforme descrito em [OLIVEIRA JR. & THOMAZ 2006]. Foram formados dois conjuntos de treinamento, o primeiro composto de 100 faces masculinas com expressão neutra e 100 faces femininas com expressão neutra. O segundo conjunto de treinamento foi formado com 100 faces masculinas com expressão neutra e 100 faces femininas com expressão sorrindo. As imagens de faces são coloridas e têm dimensão de 320×260 pixels, no entanto, para otimizar o tempo de processamento, as imagens de face foram reduzidas para uma dimensão de 64×64 pixels e tornadas monocromáticas.

O primeiro experimento tomou cada conjunto de treinamento e projetou-os no espaço PCA. Depois navegou-se ao longo das três primeiras componentes principais de cada conjunto, como está descrito na equação a seguir

$$x_i = \bar{x} + \varphi_i^T b_i, \quad (5)$$

onde φ_i representa o i -ésimo autovetor, \bar{x} a média global e b_i o parâmetro de navegação, que neste caso está limitado a $\pm 3\sqrt{\lambda_i}$, onde λ_i é o respectivo autovalor e $i = 1, 2, 3$. As imagens reconstruídas de cada autovetor podem ser observadas na figura 1. Fundamentalmente, este experimento investigou quais características as três primeiras componentes principais capturavam. A navegação ao longo da primeira componente principal indica que além da informação de gênero, variações na iluminação também foram capturadas. Isto pode ser explicado pelo fato de que o PCA sempre busca a direção que apresenta a maior variância.

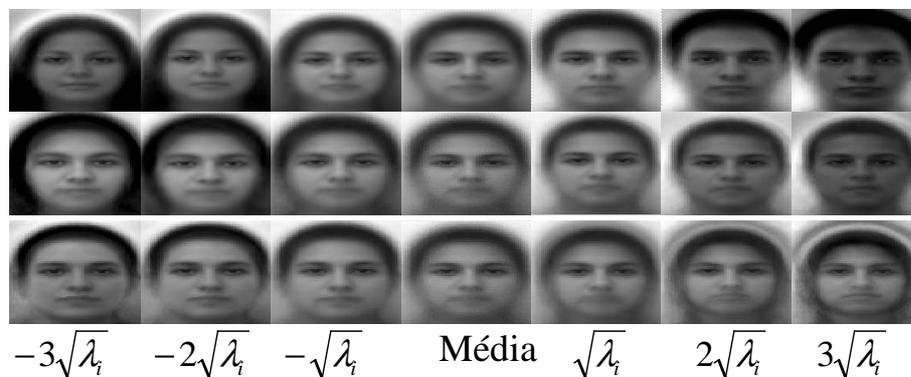


Figura 1. Reconstrução visual das três primeiras componentes principais quando se navega ao longo delas. De cima para baixo, a primeira, segunda e terceira componentes principais.

Já a segunda componente principal traz informação diferente sobre o gênero, sendo que as diferenças aparecem mais atenuadas. A terceira componente principal não necessariamente tem uma informação discriminante sobre o gênero. O segundo experimento foi similar ao primeiro, diferindo apenas no conjunto de treinamento que foi formado por 100 faces masculinas com expressão neutra e 100 faces femininas com expressão sorrindo. Procurou-se investigar como duas características discriminantes, tais como gênero e expressão facial, são capturadas pelo PCA e como elas se distribuem ao longo das componentes principais. A figura 2 apresenta a reconstrução visual das três

¹ Imagens disponíveis sob solicitação para cet@fei.edu.br

primeiras componentes principais, quando se navega ao longo delas dentro do limite de $\pm 3\sqrt{\lambda_i}$.

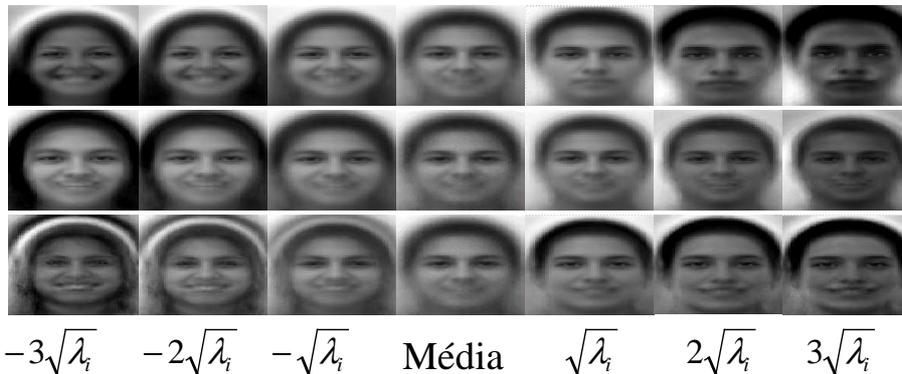


Figura 2. Reconstrução visual das três primeiras componentes principais quando se navega ao longo delas. De cima para baixo, a primeira, segunda e terceira componentes principais.

Comparando-se visualmente os resultados do segundo experimento com o primeiro experimento, observa-se que a reconstrução visual das componentes principais são muito semelhantes. Entretanto, observa-se também que a expressão do sorriso é distribuída ao longo da segunda e terceira componentes principais. Isto indica que a segunda e terceira componentes principais generalizaram essa característica ao longo dessas componentes, não considerando-a como uma característica discriminante. Na seqüência, o experimento seguinte, tomou os mesmos conjuntos de treinamento e navegou-se agora na direção do vetor mais discriminante obtido da fase MLDA. Executa-se a navegação variando-se o ponto de projeção y_i^{MLDA} da equação (6) a seguir, dentro dos limites de $\pm 2sd$ (*standard deviation*), e fazendo-se a reconstrução visual durante a navegação:

$$x_i = \bar{x} + \Phi_{PCA}^T \Phi_{MLDA}^T y_i^{MLDA}. \tag{6}$$

Os resultados podem ser visualizados na figura 3, onde percebe-se claramente a separação entre as características masculinas e femininas. Diferentemente do PCA, a reconstrução com o MLDA concentrou-se nas características que efetivamente diferenciam o grupo masculino do grupo feminino. As características capturadas somente referem-se as variações que distinguem um grupo do outro, onde observa-se que os extremos da navegação indicam a reconstrução de uma informação definitivamente masculina ou feminina.

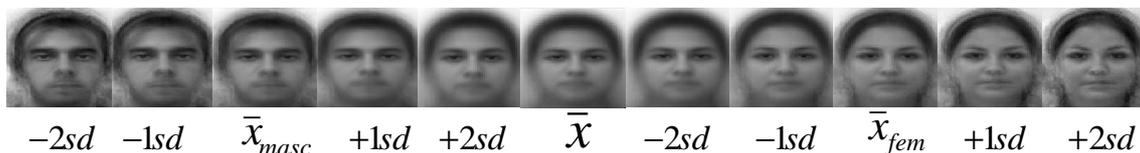


Figura 3. Reconstrução visual da face média quando se navega ao longo do hiper-plano discriminante do conjunto homens e mulheres com expressão neutra.

A figura 4 traz a reconstrução da face média quando se navega ao longo do hiper-plano discriminante para o conjunto formado por 100 faces masculinas com expressão neutra e 100 faces femininas com expressão sorrindo.

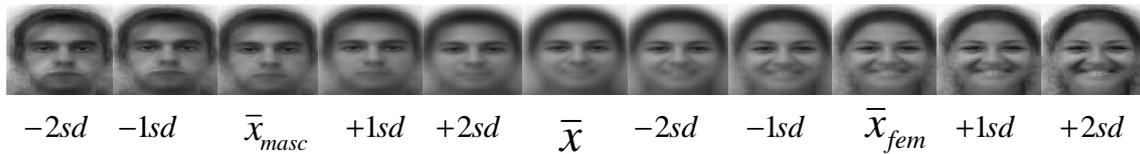


Figura 4. Reconstrução visual da face média quando se navega ao longo do hiperplano discriminante do conjunto homens com expressão neutra e mulheres sorrindo.

Observa-se que a informação do gênero continua sendo uma informação discriminante, entretanto, a expressão do sorriso também foi capturada e, o mais relevante, a informação aumenta em intensidade na direção da imagem considerada definitivamente feminina. O experimento anterior também indicou que a característica do gênero variou em intensidade quando se navega ao longo do hiperplano discriminante. Contudo, um dos objetivos era determinar o que um classificador linear considera como a informação mais discriminante. Extrapolou-se a navegação até os limites de $\pm 15sd$ e observou-se que a informação discriminante era cada vez mais destacada, ou seja, a taxa de variação da informação discriminante era maior do que o das regiões ou características não discriminantes. Para se compreender melhor o que ocorre com a informação mais discriminante, verificou-se que o segundo termo da equação (6) tem o seu comportamento regido pelo parâmetro y_i^{MLDA} , isto porque as bases Φ_{PCA} e Φ_{MLDA} são constantes, para um determinado conjunto de treinamento.

Como o parâmetro y_i^{MLDA} faz o produto interno com as duas bases, pode-se concluir que a variação do segundo termo da equação (6) é linear. Entretanto, a reconstrução visual da projeção y_i^{MLDA} sem a média indica que esse parâmetro afeta diretamente a amplitude dos níveis de cinza de cada *pixel* da imagem de face. Pode-se concluir então que as imagens reconstruídas na figura 5 representam uma variação Δ_{img} de cada *pixel* em termos de profundidade, quando percorremos o hiperplano discriminante, sugerindo que as variações nas imagens são as informações discriminantes que são consideradas pelo classificador, bem como o seu grau de generalização.

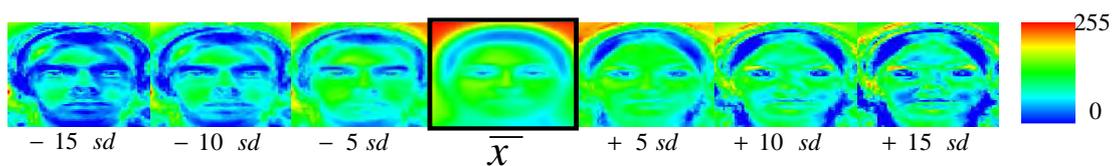


Figura 5. Reconstrução da imagem de face média do conjunto de treinamento homens e mulheres, quando se navega até os limites de $\pm 15sd$.

A variação entre duas imagens reconstruídas definida por $\Delta_{img} = x_i - x_{i-1}$ indica exatamente o que foi alterado quando reconstruímos o ponto y_i^{MLDA} e o ponto y_{i+1}^{MLDA} . Se considerarmos que Δ_{img} é a variação que ocorre entre duas imagens reconstruídas quando percorremos o hiperplano discriminante, pode-se escrever essa diferença como sendo as variações impostas pelo reconstrução do vetor y_i^{MLDA} , ou seja,

$$\Delta_{img} = \Phi_{PCA}^T \Phi_{MLDA}^T (y_i^{MLDA} - y_{i-1}^{MLDA}). \tag{7}$$

Desta maneira, as imagens médias reconstruídas e coloridas artificialmente^ξ indicam que há uma variação não uniforme ao longo das imagens, indicando que as áreas

^ξ Por favor, acesse a versão on-line deste artigo para visualizar as imagens coloridas.

discriminantes sofrem alterações mais rápidas que as áreas não discriminantes. Para se determinar numericamente a taxa de variação, calculou-se a variação das imagens geradas em $\pm 1sd$. Como para $y_i^{MLDA} = 0$, a variação é zero, e o que resta é a própria imagem de face média, logo para $\pm 1sd$ a variação será a própria reconstrução dos pontos y_i^{MLDA} sem a face média. E a taxa de variação δ_{img} pode ser determinada pela seguinte equação,

$$\delta_{img} = \frac{\Delta_{img}}{dx}. \tag{8}$$

A figura 5 ilustra o fenômeno da variação de intensidade em determinadas regiões da imagem quando se reconstrói a face média para o conjunto de treinamento 1. Observa-se que a medida que se navega na direção dos dois limites algumas regiões sofrem alterações mais intensas enquanto que outras regiões ou não se alteram ou sofrem variações mais sutis. De maneira semelhante, apresenta-se na figura 6 a seguir a variação da taxa de intensidade durante a reconstrução da imagem de face para o segundo conjunto de treinamento. Conclui-se pelas imagens que as regiões mais escuras correspondem exatamente às regiões da face que normalmente sofrem alterações quando sorrimos ou ficamos com expressão neutra. No entanto, é relevante observar também que o modelo capturou e separou também as características relativas ao gênero.

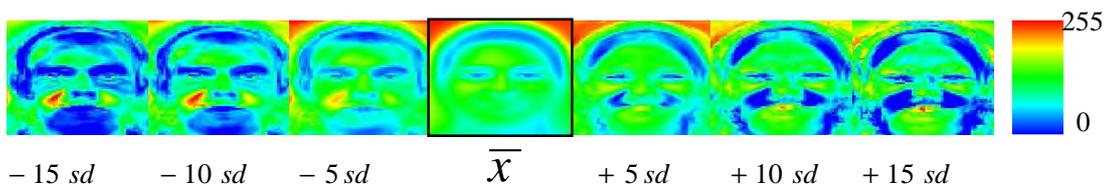


Figura 6. Reconstrução da imagem de face média do conjunto de treinamento homens com expressão neutra e mulheres sorrindo, quando se navega até os limites de $\pm 15sd$.

Assim como foi apresentado em [KITANI, THOMAZ, GILLIES 2006], um último experimento avaliou o quanto o modelo de representação baseado na face média poderia ser transferido para uma face comum. Tomou-se uma face qualquer do conjunto de treinamento e removeu-se a face média global, depois adicionou-se a face média sintetizada pela navegação no hiperplano discriminante do conjunto homens e mulheres. Os resultados podem ser visualizados na figura 7. Observa-se que a face de teste incorporou alguns traços masculinos, no entanto sem perder os traços relacionados com a sua identidade.

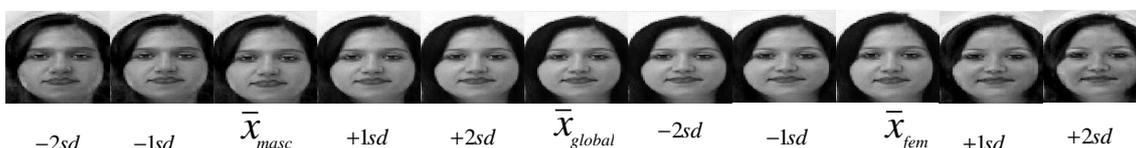


Figura 7. Transferência da face média sintetizada do grupo homens e mulheres, para uma imagem de face com identidade.

7 Conclusão

Este estudo baseou-se na hipótese de que um classificador linear poderia não somente capturar informações que são úteis para fins de classificação, mas também poderia modelar visualmente o grau de generalização que foi capturado pelo classificador. Apresentou-se visualmente a capacidade de generalização das componentes discriminantes e também a possibilidade de se predizer as informações discriminantes

dos intervalos entre duas amostras. Além disso, reconstruiu-se visualmente as informações discriminantes capturadas pelo classificador linear. Os resultados desta pesquisa têm uma aplicação promissora que seria o uso da abordagem SDM em experimentos que não sejam necessariamente compostos de imagens de faces. Cita-se como principal exemplo a aplicação em imagens médicas, uma vez que neste tipo de aplicação é necessário o auxílio de um especialista para se determinar quais informações são relevantes para fins de classificação. Neste tipo de aplicação, o SDM poderia ser útil para investigar visualmente como ocorrem as variações entre duas ou mais classes de amostras em termos de informação discriminante. Igualmente útil para o especialista seria avaliar o grau de generalização tanto do classificador quanto das componentes principais. Isto porque possivelmente estruturas que não são percebidas visualmente, quando se trabalha com toda a imagem, poderiam ser destacadas quando se navega pelos hiperplanos discriminantes ou então pelas componentes principais.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a Leo Leonel de Oliveira Junior pela aquisição, normalização e alinhamento do banco de faces da FEI sob a bolsa FEI-PBIC 32-05, e o apoio da FAPESP através do projeto 2005/02899-4.

Referências

- BELHUMEUR, P.; HESPANHA, J. P. N.; KRIEGMAN, D. J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: recognition using class specific linear projection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 19, n. 7, pp. 711-720, July 1997.
- BUCHALA, S.; DAVEY, N.; GALE, T. M.; FRANK, R. J. Principal components analysis of gender, ethnicity, age and identity of face images. In 5th annual UK Workshop on Computational Intelligence, London, UK, 8 pages, November 2005.
- COOTES, T. F.; EDWARDS, G. J.; TAYLOR, C. J. Active Appearance Models. H. BURKHARDT and B. NEWMANN, ECCV, Springer, pp. 484-498, 1998.
- EDWARDS, G. J.; LANITIS, A.; TAYLOR, C. J.; COOTES, T. F.; Statistical models of face images – Improving specificity. *Image and Vision Computing*; v. 16, pp. 203-211, 1998.
- FUKUNAGA, K. Introduction to statistical pattern recognition, 2nd ed. Academic Press, Boston, 1990.
- KITANI, E. C.; THOMAZ, C. E.; GILLIES, D. F. A statistical discriminant model for face interpretation and reconstruction. In: proceedings of SIBGRAPI' 06, IEEE CS Press, Manaus, Amazonas, Brazil, pp. 247-254, October 2006.
- JOLLIFFE, I. T. Principal components analysis, UK: 2nd ed., Springer, 2002.
- LASCA, V. B.; BORGES, D. L. Recognizing Faces with Minimum Information. In proceedings of Signal Processing, Pattern Recognition, and Applications, SPPRA, pp. 260-265, 2002.
- SIROVICJH, L.; KIRBY, M. Low-dimensional procedure for the characterization of human faces. *Journal of Optical Society of America*, v. 4, pp. 519-524, March 1987.

- OLIVEIRA JR., L. L.; THOMAZ, C. E.; Captura e alinhamento de imagens: Um banco de faces brasileiro. Relatório de iniciação científica, Depto. Eng. Elétrica da FEI, São Bernardo do Campo, SP, 10 f., 2006, disponível em www.fei.edu.br/~cet.
- SWETS, D.; WENG, J. Using discriminant eigenfeatures for image retrieval. IEEE PAMI, v. 18, n. 8, pp. 831-836, August 1996.
- THOMAZ, C. E. GILLIES, D. F., FEITOSA, R. Q., A new covariance estimate for Bayesian classifiers in biometric recognition, IEEE Transactions on circuits and system video-based biometrics, v. 14, no. 2, pp. 214-223, February 2004.
- THOMAZ, C. E.; GILLIES, D. F.; A maximum uncertainty LDA-based approach for limited sample size problems with application to face recognition. In Proceedings of SIBGRAP' 05, IEEE CS Press, pp. 89-96, 2005.
- THOMAZ, C. E., KITANI, E. C. GILLIES, D. F., A maximum uncertainty LDA-based approach for limited sample size problems with application to face recognition, extended version of the SIBGRAP'05 paper, Journal of the Brazilian Computer Society (JBCS), vol. 12, no. 2, pp. 7-18, September 2006.
- TURK, M.; PENTLAND, A. Eigenfaces for recognition. Journal of Cognitive Neuroscience, MIT, v. 3, n. 1, pp. 71-86, March 1991.